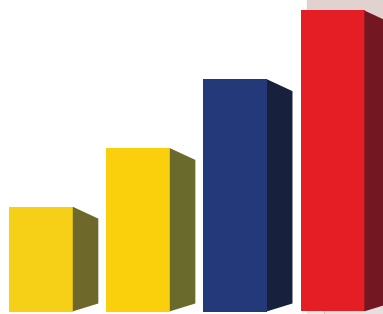


Analítica

Simulación estocástica de esquemas piramidales
tipo Ponzi

Stochastic Simulation of Ponzi Pyramidal
Schemes

Lilia Quituisaca-Samaniego, Juan Mayorga-Zambrano y
Paúl Medina



www.inec.gob.ec | www.ecuadorencifras.com

SIMULACIÓN ESTOCÁSTICA DE ESQUEMAS PIRAMIDALES TIPO PONZI

STOCHASTIC SIMULATION OF PONZI PYRAMIDAL SCHEMES

Lilia Quituisaca-Samaniego[†], Juan Mayorga-Zambrano[‡] y Paúl Medina[§]

[†] Dirección de Estudios Analíticos Estadísticos, Instituto Nacional de Estadística y Censos, Quito, Ecuador

[‡] Pontificia Universidad Católica del Ecuador - Sede Ambato, Ambato, Ecuador

[§] Instituto Gregorio Millán, Universidad Carlos III de Madrid, Madrid, España

[§] Departamento de Ciencias Exactas, Universidad de la Fuerzas Armadas ESPE, Quito, Ecuador

[†]lilia.quituisaca.samaniego@gmail.com, [‡]jmayorga@pucesa.edu.ec, [§]pmedinavz@gmail.com

Recibido: 7 de junio de 2013

Aceptado: 26 de diciembre 2013

Resumen

Mediante simulación, se estudian varios casos de fraude provocados por pirámides financieras tipo Ponzi (incluyendo los casos Madoff, DRFE y Cabrera); la técnica empleada corresponde a la implementación computacional de un modelo estocástico diseñado por J. Mayorga-Zambrano. Se comparan datos reales con aquellos generados por el software implementado; en particular, se estudia la evolución del número de clientes, del monto de estafa y del tiempo estimado de duración de la pirámide.

Palabras clave: modelamiento matemático, pirámides financieras, esquemas Ponzi, procesos estocásticos, simulación.

Abstract

Several fraud cases - including Mado's, DRFE's and Cabrera's - are studied by a software implementation of a J. Mayorga-Zambrano stochastic model. Real data is compared with simulation results, with particular interest in the evolution of the number of clients, the size of the fraud and lifetime of the pyramidal scheme.

Keywords: mathematical modeling, financial pyramidal schemes, Ponzi schemes, stochastic processes, simulation.

Código JEL: C61, C63, C02, C12.

1 Introducción

En países tan diversos como Colombia, Albania y Estados Unidos, en las últimas dos décadas han ocurrido fraudes financieros mediante esquemas piramidales. El impacto socioeconómico de este delito ha motivado estudios matemáticos de estos sistemas tanto desde una perspectiva determinística, e.g. (Artzrouni, 2009), como desde un punto de vista estocástico, e.g. (Mayorga-Zambrano, 2011).

En general, el tiempo de vida de un esquema piramidal es inversamente proporcional a la tasa de retorno ofertada. Es en este contexto que un esquema piramidal tipo Ponzi (PZ) es referido como *pirámide cerrada*, con un retorno máxi-

mo del 300 % anual; por otro lado, a un esquema piramidal no-Ponzi se le suele referir como *pirámide abierta* o *célula de abundancia*.

De hecho, fue un PZ el mayor fraude de la historia que ocurrió en Estados Unidos, desde la década de 1960. Fue ejecutado por un solo hombre, Bernard Madoff, quien, a través de su firma de inversiones mantuvo activo su fraude por más de dos décadas; se proporcionaban beneficios anuales entre el 8 % y el 15 %, "lo cual es algo extraordinariamente bueno, pero no escandalosamente bueno" (Monzó, 2008). Su pirámide afectó a grandes ahorradores privados, bancos, fondos de riesgo, profesionales de las finanzas e incluso Estados. Esto es destacable pues, ya en 1999, H. Marko-

polos (Markopolos, 2010), había denunciado públicamente como fraude a la firma de Madoff; a finales del año 2008 las actividades de Madoff fueron declaradas legalmente como fraude, siendo sentenciado en 2009 a 150 años de cárcel (United States Attorney Southern District of New York, March 12, 2009).

La demora en la detección del PZ de Madoff se debe principalmente a la ausencia de herramientas matemáticas que complementarían el Método de Análisis de Flujo de Efectivo (Kitchens, 1993), el mismo que fue puesto en conocimiento público por el FBI¹ en 1993. Los artículos (Artzrouni, 2009) y (Mayorga-Zambrano, 2011) dan una primera respuesta a esta necesidad al concentrarse en la evolución temporal de PZ.

En el presente trabajo, implementamos el algoritmo general de (Mayorga-Zambrano, 2011) (AM) bajo la plataforma JAVA, teniendo la posibilidad de modificar los parámetros iniciales conforme al caso de estudio concreto a describir. Asimismo se mejora el nivel explicativo de los resultados mediante gráficas descriptivas.

Este trabajo está estructurado de la siguiente manera: en la Sección 2 se repasan algunos conceptos, fórmulas y variables relevantes al modelo matemático esquematizado en AM; en la Sección 3 se estudian, mediante simulaciones a partir de AM algunos casos concretos de PZ: el Caso Cabrera (Ecuador), Proyecciones D.R.F.E. (Colombia) y el Caso Madoff (Estados Unidos); en la Sección 4 se describe con mayor profundidad la afectación económica derivada del Caso Cabrera; en la Sección 5 se establecen conclusiones generales del estudio y, finalmente, en los anexos A y B, se muestra en detalle las simulaciones realizadas para el caso de Carlo Ponzi (que dio nombre a este tipo de fraude),

junto con la esquematización del algoritmo generado para el desarrollo de la investigación, respectivamente.

2 El modelo

Los trabajos de Artzrouni (Artzrouni, 2009) y Mayorga-Zambrano (Mayorga-Zambrano, 2011) son pioneros en el estudio de esquemas tipo Ponzi desde un punto de vista matemático. Con el modelo estocástico diseñado en (Mayorga-Zambrano, 2011), es posible hacer un seguimiento de más variables de interés de un PZ que con el modelo determinístico de (Artzrouni, 2009); e.g. se puede hacer un seguimiento, con las limitaciones propias de la teoría de probabilidades, de: robo pecuniario, monto legal del fraude, punto crítico (definido en términos del estado financiero de la captadora) y punto de saturación (definido en términos del capital real de la captadora). Asimismo, se establece al capital promedio como un índice de referencia sobre la viabilidad futura del esquema. Por otro lado, el modelo diseñado en (Artzrouni, 2009) es más sencillo y permite estudiar, con el apoyo de ecuaciones diferenciales, el comportamiento de esquemas cuasipiramidales como el de sistema de pensiones.

En esta sección haremos una revisión breve del modelo desarrollado en (Mayorga-Zambrano, 2011). Es importante resaltar que, para el modelamiento, se tomaron en consideración criterios basados en el comportamiento observado por periodistas y por personas perjudicadas por PZ. Por ejemplo, la formulación (36) fue motivada por la experiencia observada durante la crisis de las pirámides de 2008 en el sur de Colombia y norte de Ecuador, donde un alto porcentaje de clientes de un PZ eventualmente dejaron de trabajar para vivir exclusivamente de las ganancias.

Tabla 1. Notación de magnitudes en un PZ al tiempo t . Fuente: Elaboración propia a partir de (Mayorga-Zambrano, 2011).

Not.	Magnitud	Descripción / Comentario
h	Periodo de inversión	Periodo de inversión o periodo de retorno de interés
m	Inversión inicial	Monto del primer depósito de un cliente
i_p	Taza de retorno	Interés que ofrece un PZ para un período de inversión h
$D(t)$	Tamaño legal de la estafa	Obligaciones de un PZ en papeles
$E(t)$	Expansión del capital inicial E_0	Resultado de inversiones legítimas
$R(t)$	Robo pecuniario total	Dinero extraído del pecunio de los clientes
$F(t)$	Estado financiero	El patrimonio de un PZ es despreciable
$L(t)$	Capital real total	Dinero que tiene un PZ
$C(t)$	Número total de clientes	Todos los clientes que están en el sistema Ponzi
t_k	Tiempo de la transacción k	Tiempo de transacción en el instante k
N_k	Factor de expansión	Cantidad de clientes nuevos por cada cliente antiguo
c_k	Número de clientes nuevos	Clientes nuevos al tiempo t_k
$P_{k,j}$	Captación teórica en t_k de ingresados en t_j	Dinero que el cliente supone tener en su cuenta piramidal
$\omega_{k,j}$	Tasa de retiros en t_k de ingresados en t_j	Retiros de los clientes
$P(t)$	Captación teórica total	Dinero no real captado
η_k	Tasa nominal	De inversión de un PZ en t_k^+
$\hat{P}(t)$	Capital teórico total	Dinero que un PZ finge tener en sus arcas
$P_{k,k}$	Dinero fresco que entra a un PZ en t_k	Montos depositados por nuevos clientes
W_k	Total de retiros en t_k	Retiros realizados por los clientes
$U_{j,k}(t)$	Robo pecuniario en t_k a ingresados en t_j	Monto de dinero que el sistema ha estafado
$\mathcal{L}(t)$	Capital promedio	Para hacer seguimiento del deterioro de PZ
$\mathcal{E}(t)$	Efectividad del sistema	Ganancia por una unidad monetaria pagada

¹Esta metodología de la Contabilidad Forense había servido de base para que, en 1987, la Corte Superior del Condado Ventura, California, declarara culpable de fraude por un PZ a Charles Hodson.

2.1 Relaciones básicas

En la Tabla 1, se presenta la notación a utilizar en el presente trabajo.

El modelo, diseñado y justificado conceptualmente en (Mayorga-Zambrano, 2011), es descrito por las siguientes relaciones.

$$t_k = k \cdot h, \quad k = 0, 1, \dots, K, \quad h = 1, 2, \dots, H, \quad (1)$$

$$T_c = K_c \cdot h, \quad (2)$$

$$T_s = K_s \cdot h, \quad (3)$$

$$D(t) = (1 + i_p) \cdot [\hat{P}(t) - E(t)], \quad (4)$$

$$C(t) = C_k, \quad t \in [t_k, t_{k+1}), \quad (5)$$

$$c_k = N_k \cdot C_{k-1}, \quad (6)$$

$$C_k = \sum_{j=0}^k c_j, \quad (7)$$

$$P_{k,j} = m \cdot p_{k,j}, \quad (8)$$

$$p_{k,j} = \begin{cases} 0, & \text{si } j > k, \\ c_k, & \text{si } j = k, \\ p_{k-1,j} \cdot (1 - \omega_{k,j})(1 + i_p), & \text{si } j < k. \end{cases} \quad (9)$$

$$P(t) = P_k, \quad t \in [t_k, t_{k+1}), \quad (10)$$

$$P_k = \sum_{j=0}^k P_{k,j}, \quad (11)$$

$$\hat{P}(t) = P(t) + E(t), \quad (12)$$

$$E(t) = E_0 \prod_{l=0}^{k-1} (1 + \eta_l), \quad t \in [t_k, t_{k+1}), \quad (13)$$

$$L(t) = L_k, \quad t \in [t_k, t_{k+1}), \quad (14)$$

$$P_{k,k} = m c_k, \quad (15)$$

$$\begin{cases} L_0 = E_0 + m c_0, \\ L_k = (1 + \eta_{k-1})L_{k-1} + P_{k,k} - W_k, \end{cases} \quad (16)$$

$$\begin{cases} W_k = m \cdot w_k, \\ w_k = (1 + i_p) \sum_{j=0}^{k-1} \omega_{k,j} p_{k-1,j}. \end{cases} \quad (17)$$

$$D(t) = D_k, \quad t \in [t_k, t_{k+1}), \quad (18)$$

$$D_k = (1 + i_p) \cdot P_k, \quad (19)$$

$$R(t) = R_k, \quad t \in [t_k, t_{k+1}), \quad (20)$$

$$R_k = \sum_{j=0}^k U_{j,k}(t), \quad (21)$$

$$U_{j,k}(t) = m \cdot \begin{cases} 0, & \text{si } j > k, \\ c_k, & \text{si } j = k, \\ c_j - \sum_{l=j+1}^k \omega_{l,j} \cdot p_{l,j}, & \text{si } j < k. \end{cases} \quad (22)$$

$$\begin{cases} F_0 = E_0 - i_p m c_0, \\ F_k = F_{k-1} - P_k i_p + \eta_{k-1} L_{k-1}, \quad k \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (23)$$

$$\mathcal{L}(t) = \frac{L(t)}{C(t)}, \quad (24)$$

$$\mathcal{E}(t) = \frac{L(t) - E_0}{W(t)}. \quad (25)$$

Adicionalmente,

$$t_K \leq T < t_{K+1}, \quad (26)$$

$$N_k \rightsquigarrow \mathcal{N}\left(\bar{N}_k, \frac{1}{4}\right), \quad (27)$$

$$\omega_{k,j} \rightsquigarrow \mathcal{N}(\bar{\omega}_{k,j}, \sigma_1^2), \quad (28)$$

$$0 < \sigma_1 \ll 1, \quad (29)$$

$$\eta_k \rightsquigarrow \mathcal{N}(\bar{\eta}, \sigma_2^2), \quad (30)$$

$$0 < \bar{\eta} \ll i_p, \quad (31)$$

$$0 < \sigma_2 \ll 1, \quad (32)$$

En este caso, el cálculo de las variables aleatorias N_k , $\omega_{k,j}$ y η_k siguen una distribución normal, dicha distribución es la más utilizada para modelar experimentos aleatorios, en este caso, variables continuas. Además, se ajusta a fenómenos naturales, industriales e investigativos, y representa una gran cantidad de observaciones generadas en el proceso. El promedio de las variables aleatorias depende tanto de la cantidad de variables aleatorias promediadas como de la probabilidad de cada variable que está dentro de un rango determinado.

En cada variable aleatoria calculada, se tiene que:

- la desviación estándar ($0 < \sigma \ll 1$) es pequeña, porque es necesario que la precisión sea grande;
- el intervalo de referencia $[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]$ incluye aproximadamente el 95,44% de la distribución (valores esperados)

Para (27) la desviación estándar indicaría que el ingreso de nuevos clientes por referencia de los ya existentes en un PZ, probablemente no supere el 50%.

2.2 Evolución del factor de expansión promedio

Para modelar la evolución de los valores esperados \bar{N}_k , Mayorga-Zambrano se apoya en un modelo SIR sencillo:

$$\bar{N}_k = \frac{\bar{C}_k}{\bar{C}_{k-1}} - 1, \quad (33)$$

$$\bar{C}_k = \mathcal{I}(t_k) \cdot \mathcal{U}, \quad (34)$$

con

$$\begin{cases} \dot{S} = -a S(t) \mathcal{I}(t), \\ \dot{\mathcal{I}} = a S(t) \mathcal{I}(t) - b \mathcal{I}(t), \\ S(0) = 1 - \frac{1}{\mathcal{U}}, \\ \mathcal{I}(0) = \frac{1}{\mathcal{U}}, \end{cases} \quad (35)$$

donde S representa la fracción de la PEA (población económicamente activa) susceptible de ser estafada, \mathcal{I} denota la fracción de la PEA que ya está siendo estafada y \mathcal{U} es el tamaño real de la PEA en la región de influencia de un PZ. Aquí, por facilidad, se ha supuesto que las variables aleatorias N_k y C_{k-1} son independientes.

OBSERVACIÓN 2.1. El valor referencial de \mathcal{U} corresponde al grupo de personas de la edad establecida por cada país que desempeñan una ocupación o bien, si no la tienen, la buscan activamente.

2.3 Evolución de la tasa de retiros promedio

El valor esperado de la tasa de retiros en t_k de los clientes que ingresaron a un PZ al tiempo t_j depende de $k - j$, el tiempo de permanencia en el sistema:

$$\bar{\omega}_{k,j} = \begin{cases} (k-j)[\alpha(k-j) + \beta], & \text{si } k-j \leq d_1, \\ \omega^*, & \text{si } k-j > d_1, \end{cases} \quad (36)$$

con

$$\alpha = \frac{d_1\omega_* - d_0\omega^*}{d_1d_0^2 - d_0d_1^2}, \quad \beta = \frac{d_0^2\omega^* - d_1\omega_*}{d_1d_0^2 - d_0d_1^2}, \quad \text{y} \quad \omega^* = \frac{i_p}{i_p + 1},$$

donde los coeficientes α y β están determinados por los puntos (d_0, ω_*) y (d_1, ω^*) , que corresponden a los valores esperados en el primer instante que el retiro se vuelve significativo y en el que se retira toda la ganancia, respectivamente.

Para calcular el valor esperado de la tasa de retiros, usamos una interpolación lineal; sin embargo, la ecuación es susceptible de cambio por otro tipo de comportamiento, por ejemplo, cuadrático.

2.4 Criterios de parada

En (Mayorga-Zambrano, 2011) se definen dos criterios de parada teniendo en mente que un PZ busca que su tiempo de funcionamiento T sea lo más extenso posible.

El *punto crítico* T_c de un PZ es el tiempo que su estado financiero cambia por primera vez de signo:

- (C1) $F(T_c) = 0$;
- (C2) $F(t) > 0$, para todo $t \in (0, T_c)$;
- (C3) Si T_0 verifica (C1) y (C2), entonces $T_c \leq T_0$.

Por otro lado, el *punto de saturación* T_s de un PZ es el instante en que su capital real total cambia por primera vez de signo, es decir:

- (S1) $L(T_s) = 0$;
- (S2) $L(t) > 0$, para todo $t \in [0, T_s)$;
- (S3) Si T_0 verifica (S1) y (S2), entonces $T_s \leq T_0$.

Los puntos crítico y de saturación son variables aleatorias cuyas distribuciones de probabilidad dependen de parámetros y variables del sistema (por ejemplo: periodo de inversión, tasa de retorno, etc.). En (Mayorga-Zambrano, 2011) se demuestra que T_s se presenta cuando el número de clientes nuevos es insuficiente.

²Propia del lenguaje de implementación, en este caso JAVA.

³S.O: Linux/Windows; RAM: 512MB; velocidad: 4GHz; 60MB de espacio en disco (instalación), 1GB de espacio en disco (ejecución)

2.5 Implementación del algoritmo general

La trayectoria o intervalo que siguen las personas a ser estafadas $\mathcal{S}(t)$ y las personas estafadas $\mathcal{I}(t)$ es el tiempo transcurrido entre la aparición de clientes nuevos por cada cliente actual en un PZ. El intervalo $[a, b]$ se calcula a partir del punto central (p_C):

$$a = p_C - 0,05; \quad b = p_C + 0,05,$$

donde

$$p_C = \frac{\mathcal{U}}{\text{concat}(1; \text{rep}(0; \text{long}(\mathcal{U}) - 1))},$$

y las funciones:

- $\text{long}(\text{argumento})$, es la función que permite obtener la longitud de un valor;
- $\text{rep}(\text{argumento}; \text{num_de_veces})$, es la función que permite repetir un texto o número cierta cantidad de veces;
- $\text{concat}(\text{argumento}_1; \text{argumento}_2)$, es la función² que permite unir texto, números, etc.

Por ejemplo, si $\mathcal{U} = 5592223$, entonces

$$\text{long}(\mathcal{U}) = 7, \quad \text{rep}(0; \text{long}(\mathcal{U}) - 1) = 000000$$

y

$$\text{concat}(1; \text{rep}(0; \text{long}(\mathcal{U}) - 1)) = 1000000$$

Se toma el criterio del punto central (p_C), por cuanto el número de personas estafadas ($\mathcal{I}(t)$), es bajo en las primeras y últimas etapas del proceso. Como resultado, el número de estafados experimenta el mayor crecimiento durante la etapa intermedia del proceso. Por tanto, a y b son ajustados para cada caso particular de un PZ.

La automatización del Algoritmo AM (véase Apéndice B) permite simular el comportamiento de un esquema piramidal mediante el modelo desarrollado en (Mayorga-Zambrano, 2011). Los parámetros iniciales a y b mencionados anteriormente son fundamentales para cada simulación; estos se deben elegir de acuerdo a la información encontrada para cada caso concreto de un PZ, teniendo presente la Observación (2.1).

El algoritmo se implementó bajo la plataforma de desarrollo JAVA, con requerimientos técnicos mínimos³. Respecto del algoritmo, se debe señalar que:

- i) usa $\text{Normal}(\mu; \sigma^2)$, un generador de números aleatorios que sigue una distribución $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$;
- ii) usa $\text{sir}(U, a, b)$, una función computacional para la resolución numérica del modelo SIR (35), mediante un esquema de diferencias finitas: para un paso $0 < \epsilon \ll 1$, se tiene que

$$\mathcal{S}(t_{j+1}^*) \approx \mathcal{S}(t_j^*)[(1 - a\epsilon\mathcal{I}(t_j^*))] \quad (37)$$

$$\mathcal{I}(t_{j+1}^*) \approx \mathcal{I}(t_j^*)[1 - b\epsilon + a\epsilon\mathcal{S}(t_j^*)], \quad (38)$$

con la inicialización

$$\mathcal{S}(0) = 1 - \frac{1}{\mathcal{U}}; \quad \mathcal{I}(0) = \frac{1}{\mathcal{U}}$$

- iii) incorpora ciclos repetitivos que calculan el promedio por frecuencia de cada parámetro para la generación de gráficos estadísticos, tanto en el punto crítico como en el punto de saturación.
- iv) genera información resultante de cada caso mediante listas de datos y gráficos descriptivos.

2.6 Comparación con un algoritmo simple

Comparemos los resultados de nuestra implementación de AM con el algoritmo propuesto por DeWitt (DeWitt), para el fraude de Carlo Ponzi, 1920 (véase el Anexo A). El algoritmo de DeWitt es una de las pocas referencias que existe en relación a un modelo matemático que describe el comportamiento de un PZ y se fundamenta en que el supuesto de que el número de clientes estafados sigue una función exponencial

$$y = 1000(2^n),$$

donde $n = 0, 1, 2, \dots$; y; por tanto, el resto de variables asociadas cambiará conforme evoluciona el periodo y número de clientes incorporados a la estafa.

En este sentido la comparación realizada muestra, sin que los modelos se parezcan, que el comportamiento de las variables asociadas está ligado al número de clientes estafados. Aunque los modelos no son comparables, las tendencias encontradas de los resultados evidencian la similitud y el posible comportamiento de un PZ.

En la Figura 1, se observa que el número de clientes de Carlo Ponzi difiere hasta en un 85 % a los siete meses, con respecto a la simulación ejecutada, y es superior hasta en un 53 % con respecto al proceso que realiza DeWitt (DeWitt).

En la Figura 2, se observa que el monto de estafa de Ponzi, a los siete meses, es superior al 50 % respecto a la simulación ejecutada y al proceso que realiza DeWitt (DeWitt).

Tabla 2. Simulación del número de clientes: serie comparativa del Caso Carlo Ponzi con el proceso de DeWitt. APC: Antes del Punto Crítico; PC: Punto Crítico. Fuente: Elaboración propia.

Periodos comparativos	Número de clientes		
	Simulación	DeWitt	Datos investigados
0 años y 6 meses	8.551	4.000	Sin/Dato(S/D)
0 años y 9 meses APC	38.594	8.000	
1 año y 0 meses PC	127.464	16.000	
7 meses	Sin/Dato(S/D)		Superior a 10 mil

Tabla 3. Tamaño de estafa: serie comparativa del Caso Ponzi con el proceso de DeWitt. Fuente: Elaboración propia.

Periodos comparativos	Tamaño de estafa (millones)		
	Simulación	DeWitt	Datos investigados
0 años y 6 meses	4,38	4,00	S/D
0 años y 9 meses APC	10,97	8,00	
1 año y 0 meses PC	37,14	16,00	
7 meses	S/D		Superior a \$10

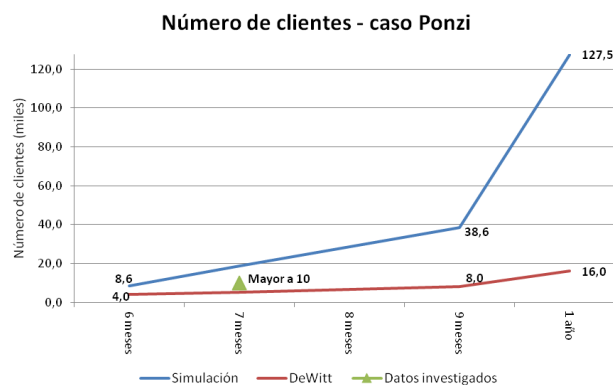


Figura 1. Número de clientes: serie comparativa del Caso Ponzi con el proceso de DeWitt. Fuente: Elaboración propia.

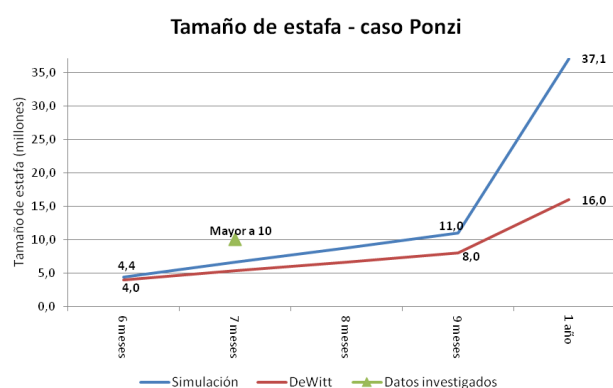


Figura 2. Tamaño de estafa: serie comparativa del Caso Ponzi con el proceso de DeWitt. Fuente: Elaboración propia.

2.7 Análisis de convergencia y sensibilidad

Se afinan los parámetros de ingreso para el caso de Carlo Ponzi (Anexo A). La simulación es un proceso iterativo; en este caso usamos el método Montecarlo. Se utiliza una distribución normal $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$, y para la generación de números aleatorios, se aplica el método de Box-Muller. A continuación, se presentan algunos resultados.

Parámetro cambiante: Capital inicial

El capital inicial es directamente proporcional al tiempo en que se establece el punto crítico, al igual que la expansión de capital. Por otra parte, se mantiene prácticamente invariante el tiempo en el cual se alcanza el Punto de Saturación, lo cual indica que este parámetro no afecta los resultados finales. Por lo tanto, existe estabilidad en el punto de saturación.

Parámetro cambiante: Tasa de retorno

Si la tasa de retorno aumenta, se disminuye el tiempo en que se establece el punto crítico, al igual que el número

clientes y el tamaño estafa. Mientras se mantienen el tiempo del punto de saturación al igual que la expansión de capital, el resultado es consistente. Al aumentar la tasa de retorno, el número de clientes estafados se perjudicará, pues se alcanza antes el punto crítico. El punto de saturación es invariante a estos efectos, por lo tanto, sigue estable.

Parámetro cambiante: Período básico de inversión (número de meses)

Si se aumenta el número de meses en que se haría efectivo el pago de la tasa de retorno, se incrementa el tiempo en que se establecen el punto crítico y el punto de saturación. El resultado, nuevamente, es consistente pues, al aumentar el tiempo de permanencia del dinero en el sistema, en instantes en que los punto crítico y punto de saturación se alcanzan, debe cambiar de manera positiva, es decir, crecer. La estafa se alarga en el tiempo.

Parámetro cambiante: monto de inversión inicial

Si el monto de inversión se incrementa hasta llegar al valor del capital inicial, el tiempo en que se establece el punto crítico es menor. Se puede observar que se incrementa la expansión de capital, se incrementa el tamaño de la estafa al igual que el monto de retiro. El tiempo en que se establece el punto de saturación se mantiene; por lo tanto,

la estabilidad del punto de saturación, así como la consistencia de los resultados, siguen estables.

3 Escenarios de simulación

3.1 Caso Madoff (1960-2008)

La firma *Bernard Madoff Investments Securities*, fundada en 1960, maquinó una de las estafas PZ más grandes por el tiempo de duración, el tamaño de estafa y el número de clientes afectados alrededor del mundo. En su pirámide existieron grandes ahorradores privados, bancos, fondos de riesgo, entre otros, quienes recibían intereses anuales entre el 8 % al 15 % por la inversión, lo que generó estabilidad y confianza.

A partir de 1992, Madoff fue investigado por organismos reguladores y denunciado por varias empresas, pero lograba superar las inspecciones de la Comisión de Mercados y Valores (SEC). *“Las operaciones de inversión de Madoff eran un fraude que nadie quiso escuchar”* (Markopolos, 2010).

El tamaño de estafa está en torno a los 65.000 millones de dólares. El Grupo Santander colocó unos 2.320 millones de euros, de los cuales 2.010 millones correspondían a la banca privada internacional de América Latina (Weitmann, 2009).

A continuación, se presenta las tablas con los resultados, con los siguientes parámetros:

Tabla 4. Resumen de datos Punto Crítico (PC), Punto de Saturación (PS). Caso Madoff. Fuente: Elaboración propia.

Parámetro	Antes PC	PC	Antes PS	PS
Periodo	13	14	25	26
Tiempo	13años,0meses	14años,0meses	25años,0meses	26años,0meses
Número de clientes	544.023	1'756.330	86.880'042.974	235.914'711.838
Expansión de capital (miles)	9.219,77	9.624,96	15.562,43	16.283,41
Tamaño de estafa (millones)	60,72	194,54	9'657.820,25	26'244.336,14
Retiros (miles)	752,20	1.825,51	94'779.057,67	260'975.897,62
Estado financiero (millones)	3,43	-8,11	-1'091.462,60	-3'029.406,77
Capital real (millones)	64,15	186,43	132.888,72	-231.472,77
Capital promedio	120,65	107,33	26,03	-6,04

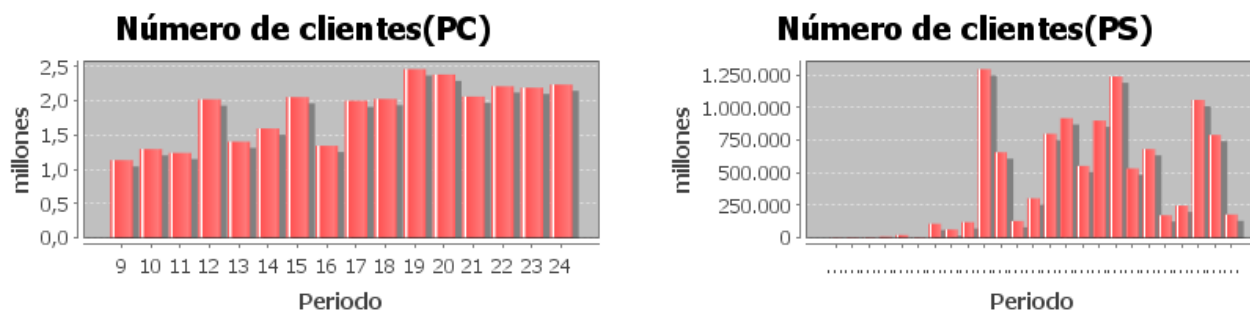


Figura 3. Número de clientes - Madoff. a) punto crítico b) punto de saturación. Fuente: Elaboración propia

Como se observa en la Tabla 4, el número de clientes crece de forma acelerada, siendo superior al 300 % al llegar al punto crítico; ello representaría el 20 % del promedio de la PEA entre los años 1998-2008 de Estados Unidos (Banco

mundial). Para el punto de saturación, se hace imposible una comparación puesto que se ha sobrepasado el total de la población mundial.

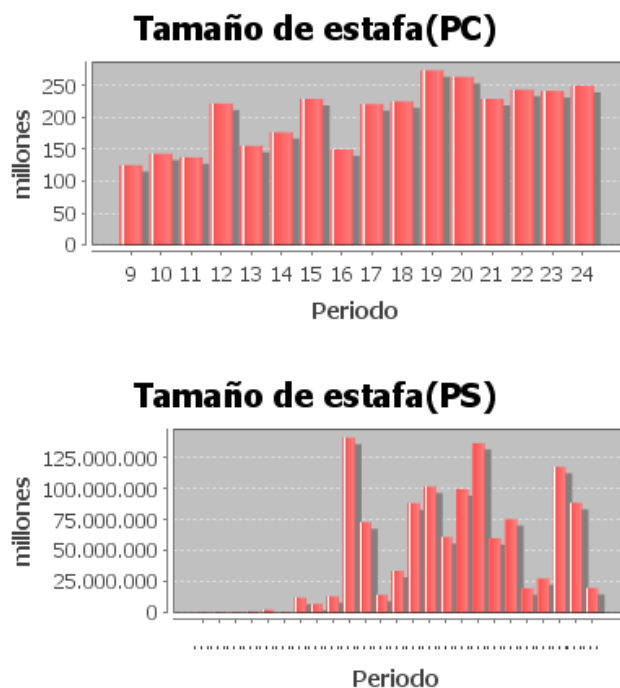


Figura 4. Tamaño de estafa - Madoff. a) punto crítico b) punto de saturación. Fuente: Elaboración propia.

El porcentaje de variación de la expansión de capital entre el punto crítico y el punto de saturación sobrepasa el 70%. El tamaño de la estafa se incrementa de forma exagerada durante el proceso con el 220% en el punto crítico y del 172% en el punto de saturación. Podemos observar que el porcentaje de retiro es menor al 1% con respecto al tamaño de la estafa en los últimos años de vida de la pirámide.

3.2 Caso Proyecciones DRFE (2005-2008)

El comerciante Carlos Alfredo Suárez, por medio de Proyecciones D.R.F.E. entregaba 70% de interés mensual, y en los tres últimos meses de duración de la pirámide, pagó 150% de interés mensual. Las ciudades de mayor afectación fueron colombianas: Pasto, Cali, Popayán y Santander de Quilichao, con aproximadamente 6 millones de afectados. El monto mínimo de inversión era 2 millones de pesos (aproximadamente \$1.030,51)⁴. Se presume que el monto de estafa fue de 2 billones de pesos (aproximadamente \$1.030.508.195,12), (Paredes, 2009). Como dato adicional, debemos mencionar que la tasa de interés del Banco Central de Colombia era de 9,5%, para el año 2008 (Colombia, Banco de la República).

A continuación, se presentan las tablas con los resultados, con los siguientes parámetros:

Tabla 5. Resumen de datos Punto Crítico (PC), Punto de Saturación (PS). Proyecciones DRFE. Fuente: Elaboración propia.

Parámetro	Antes PC	PC	Antes PS	PS
Periodo	42	43	46	47
Tiempo	3años,6meses	3años,7meses	3años,10meses	3años,11meses
Número de clientes	306.252	430.136	15'626.738	29'225.681
Expansión de capital (miles)	27.882,33	30.514,04	4'022.991,91	43.923,99
Tamaño de estafa (millones)	7,45	9,49	138,07	243,91
Retiros (miles)	1.743,51	2.111,85	13.353,58	21.790,73
Estado financiero (millones)	1,37	-1,71	-128,39	-227,92
Capital real (millones)	8,82	7,78	9,68	-17,51
Capital promedio	44,47	30,51	4,57	-4,01

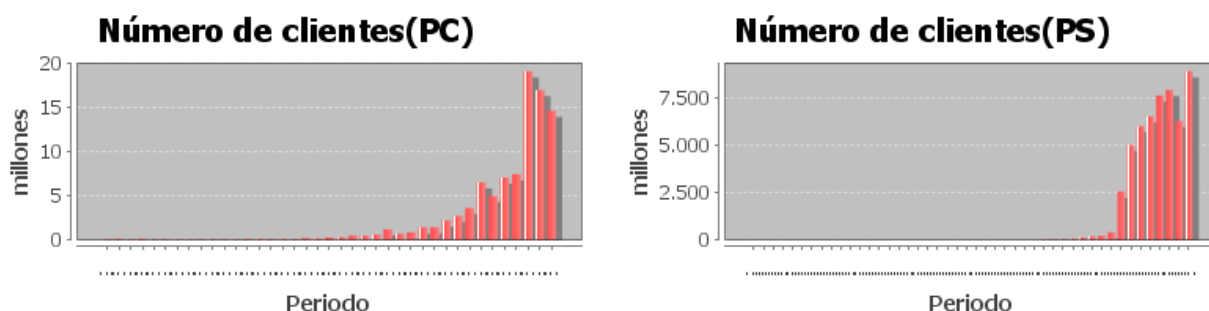


Figura 5. Número de clientes - Proyecciones D.R.F.E. a) punto crítico b) punto de saturación. Fuente: Elaboración propia.

Analizando los datos de la Tabla 5, observamos que en el punto crítico existe un incremento del 40% en comparación con el período anterior. El crecimiento de clientes en

el punto de saturación sobrepasa la PEA de Colombia (promedio entre los años 2005-2008, según datos obtenidos en (Banco mundial)) en un 147%.

⁴La tasa promedio de cambio, de enero a noviembre 2008, fue de \$1 = 1.940,79 pesos.

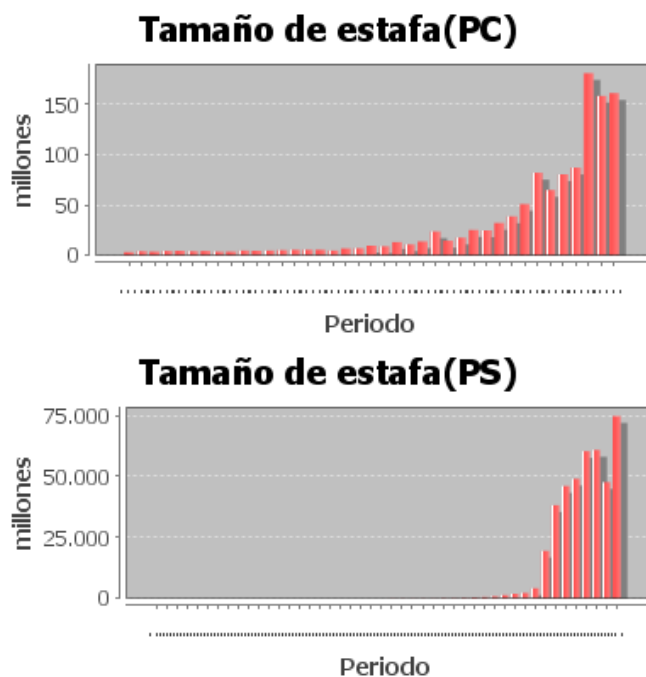


Figura 6. Tamaño de estafa - D.R.F.E. a) punto crítico b) punto de saturación. Fuente: Elaboración propia.

Según la Tabla 5, el porcentaje de variación de la expansión de capital entre el punto crítico y el punto de saturación es del 44 %. El tamaño de la estafa se incrementa de forma exagerada durante el proceso, por el contrario, podemos observar que el porcentaje de retiro es de aproximadamente el 20 % en el punto crítico, y de apenas el 9 % en el punto de saturación con respecto al tamaño de la estafa en los últimos meses de vida de la pirámide.

3.3 Caso Cabrera (1996-2005)

José Cabrera dirigía la Notaría Segunda del cantón Machala (provincia de El Oro), en Ecuador. Entregaba intereses mensuales del 7 % al 10 % a miles de clientes de distintos lugares de Ecuador, especialmente de las provincias de Azuay, Guayas, Loja, Manabí y Pichincha, constituyéndose en una de las estafas más grandes ocurridas en el país. Se presume que el monto de estafa superaría los \$700 millones de dólares, con más de 35 mil personas afectadas. El monto de inversión inicial de algunos clientes sobrepasaba los \$30.000, según un listado encontrado en sus archivos personales. La lista de personas que conformaban la pirámide comprometía a varios jueces, políticos, banqueros, policías y militares (Angulo *et al.*, 2005).

Resumimos los resultados en los gráficos y tablas que se describen a continuación.

Tabla 6. Resumen de datos Punto Crítico (PC), Punto de Saturación (PS). Caso Cabrera. Fuente: Elaboración propia.

Parámetro	Antes PC	PC	Antes PS	PS
Periodo	44	45	125	126
Tiempo	3años,8meses	3años, 9meses	10años,5meses	10años,6meses
Número de clientes	186.557	389.925	29.469'862.391	43.523'114.739
Expansión de capital (miles)	14.702,22	14.992,84	30.192,00	30.978,63
Tamaño de estafa (millones)	103,15	212,01	15'973.877	23'627.714,46
Retiros (miles)	1.820,79	3.693,52	613'216.534,96	918'526.789,55
Estado financiero (millones)	3,96	-7,24	-2858.013,86	-4'386.873,73
Capital real (millones)	107,10	204,77	623.950,51	-711.429,83
Capital promedio	496,88	476,55	59,83	-23,33

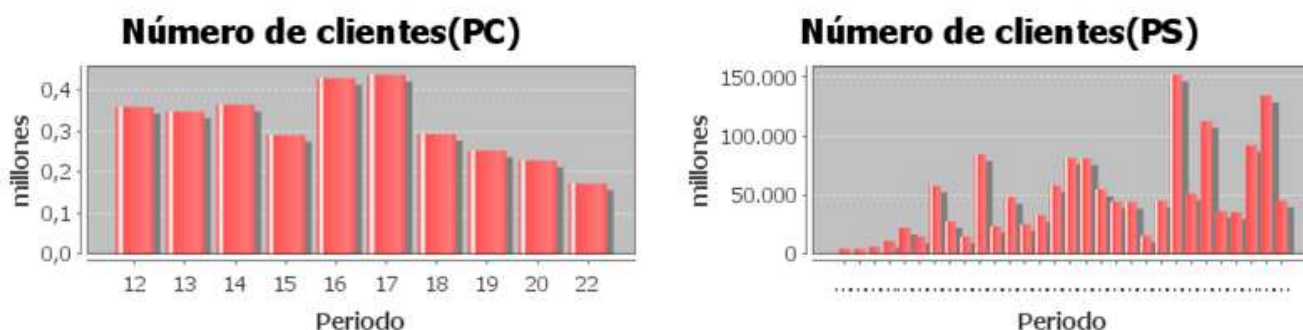


Figura 7. Número de clientes - Caso Cabrera. a) punto crítico b) punto de saturación. Fuente: Elaboración propia.

Para el punto de saturación, se ha sobrepasado el total de habitantes de Ecuador (15'590.157 millones, noviembre 2012), como se puede observar en la Tabla 6.

A continuación, presentamos un resumen comparativo de cada uno de los casos, con énfasis en el número de clientes, el tamaño de estafa y el porcentaje de retiro frente al tamaño de la estafa. Los resultados desglosados para las demás variables estudiadas están en la subsección anterior.

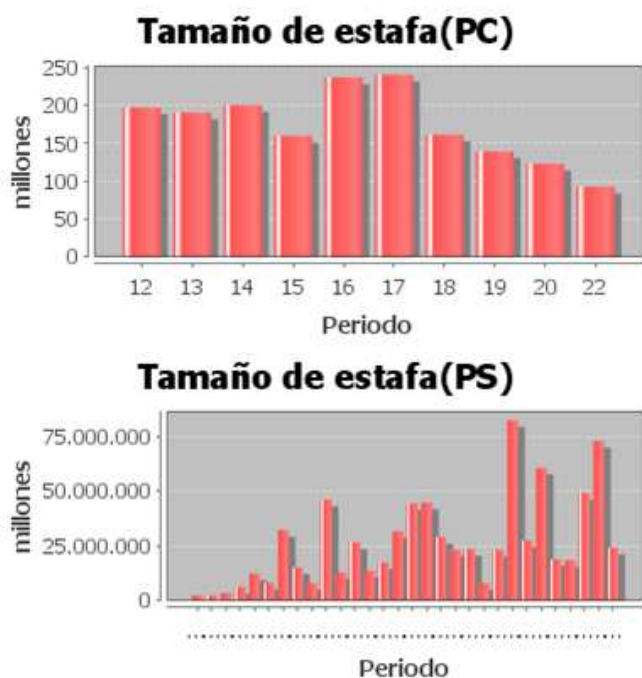


Figura 8. Tamaño de estafa - Caso Cabrera. a) punto crítico b) punto de saturación. Fuente: Elaboración propia.

El porcentaje de variación de la expansión de capital entre el punto crítico y el punto de saturación sobrepasa el 100%. El tamaño de la estafa se incrementa de forma exagerada durante el proceso; en contraste, los retiros disminuyen de manera importante. Podemos observar que el porcentaje de retiro es del 4% con respecto al tamaño de la estafa en los últimos meses de vida de la pirámide.

3.4 Comparación de resultados de los casos estudiados

En el presente apartado se presentarán, a manera de resumen, los resultados obtenidos a partir de la implementación del algoritmo para los diferentes casos.

Consideramos el Caso Madoff, Proyecciones D.R.F.E.⁵ y Caso Cabrera, con los siguientes parámetros:

Tabla 7. Parámetros de ingreso: Caso Madoff, Proyecciones D.R.F.E. y Caso Cabrera. Fuente: Elaboración propia.

Parámetro	Caso Madoff	Proyecciones D.R.F.E	Caso Cabrera
E_0	5'000.000	500.000	10'000.000
ω	10%	10%	10%
i_p	8%	70%	7%
h	12	1	1
m	100	2	500
c_0	1	1	1
η	4,6%	9,5%	2,5%

⁵Se han simplificado cifras para la simulación.

3.4.1 Número de clientes

- **Caso Madoff:** En este caso fueron afectados miles de inversionistas (grandes ahorradores privados, bancos, fondos de riesgo, etc) de algunos continentes, desconociéndose la cifra aproximada de clientes afectados. Cuando la pirámide llega a los 25 años ha sobrepasado la población mundial, según la Tabla 8.
- **Proyecciones D.R.F.E:** En la Tabla 9, se observa que el número de clientes en el punto crítico esta por debajo del 7% del número de inversionistas investigados (mínimo 6 millones), mientras que para el punto de saturación el número de inversionistas simulados, sobrepasa esta cifra en un 480%.
- **Caso Cabrera:** Para el caso Cabrera, podemos observar en la Tabla 10 que el número de clientes sobrepasa la cifra estimada en un 800% al llegar al punto crítico; para los siguientes meses se sobrepasa a la población mundial.

Tabla 8. Número de clientes - Caso Madoff. Antes del Punto Crítico (APC), Punto Crítico (PC), Antes del Punto de Saturación (APS), Punto de Saturación (PS), Sin Dato (S/D). Fuente: Elaboración propia.

Periodos comparativos	Número de clientes		
	Simulación (miles)	Datos investigados	
13 años y 0 meses	APC	544,02	S/D
14 años y 0 meses	PC	1.756,33	
25 años y 0 meses	APS	86'880.042,97	
26 años y 0 meses	PS	235'914.711,84	
Mayor a 20 años	S/D		Incalculable

Tabla 9. Número de clientes. Proyecciones D.R.F.E. Fuente: Elaboración propia.

Periodos comparativos	Número de clientes		
	Simulación (miles)	Datos investigados	
3 años y 6 meses	APC	306,53	S/D
3 años y 7 mes/es	PC	430,14	
3 años y 10 mes/es	APS	15626,73	
3 años y 11 mes/es	PS	29225,68	
Mayor a 3 años	S/D		Superior a 6 millones

Tabla 10. Número de clientes. Caso Cabrera. Fuente: Elaboración propia.

Periodos comparativos		Número de clientes	
		Simulación (miles)	Datos investigados
3 años y 8 mes/es	APC	186,557	S/D
3 años y 9 mes/es	PC	383,935	
10 años y 5 mes/es	APS	29'469.862,391	
10 años y 6 mes/es	PS	43'523.114,391	
Mayor a 9 años		S/D	Superior a 35 mil

3.4.2 Tamaño de estafa

- **Caso Madoff:** En la Tabla 11, podemos observar que, en el punto crítico, el tamaño de la estafa es apenas el 0,30 % del monto de estafa investigado; al compararlo con el tamaño de estafa a los 25 años, el resultado de la simulación supera el 1000 %.
- **Proyecciones D.R.F.E.:** En la Tabla 12, podemos observar que, antes de llegar al punto crítico (3 años y 6 meses), se ha superado en un 300 % al monto de estafa investigado.
- **Caso Cabrera:** En el resumen de la Tabla 13, podemos observar que, en el punto crítico, el notario Cabrera debe haber tenido aproximadamente el 20 % del tamaño de estafa estimado (Angulo *et al.*, 2005), según la simulación realizada.

Tabla 11. Tamaño de estafa. Caso Madoff. Antes del Punto Crítico (APC), Punto Crítico (PC), Antes del Punto de Saturación (APS), Punto de Saturación (PS), Sin Dato (S/D). Fuente: Elaboración propia.

Periodos comparativos		Tamaño de estafa (millones)	
		Simulación	Datos investigados
13 años y 0 mes/es	APC	60,72	S/D
14 años y 0 mes/es	PC	194,54	
25 años y 0 mes/es	APS	9'657.820,25	
26 años y 0 mes/es	PS	26'244.336,14	
Mayor a 20 años		S/D	Superior a \$65000

Tabla 12. Tamaño de estafa en millones. Proyecciones D.R.F.E. Fuente: Elaboración propia.

Periodos comparativos		Tamaño de estafa (millones)	
		Simulación	Datos investigados
3 años y 6 mes/es	APC	7,4	S/D
3 años y 7 mes/es	PC	9,49	
3 años y 10 mes/es	APS	138,07	
3 años y 11 mes/es	PS	243,91	
Mayor a 3 años		S/D	Superior a 2 millones⁶

⁶Porcentaje de PEA afectada con respecto al número de clientes en el punto crítico (383.935) - caso Cabrera (Tabla 10).

Tabla 13. Tamaño de estafa en millones. Caso Cabrera. Fuente: Elaboración propia.

Periodos comparativos		Tamaño de estafa (millones)	
		Simulación	Datos investigados
3 años y 8 mes/es	APC	103,15	S/D
3 años y 9 mes/es	PC	212,01	
10 años y 5 mes/es	APS	15'973.876,75	
10 años y 6 mes/es	PS	23'627.714,46	
Mayor a 9 años		S/D	Superior a \$700

3.4.3 Retiros versus tamaño de la estafa

En la Tabla 14, se resume el porcentaje de retiro con respecto al tamaño de la estafa. Para el caso Ponzi, el porcentaje de retiro crece, mientras que en los casos restantes, decrece a medida que la pirámide financiera incrementa el número de inversores.

Tabla 14. Porcentaje de retiro con respecto al tamaño de la estafa de los casos de estudio. Fuente: Elaboración propia.

Casos	Puntos de estudio			
	APC	PC	APS	PS
Cabrera	5,86 %	5,49 %	2,14 %	2,09 %
DRFE	23,40 %	22,25 %	9,67 %	8,93 %
Madoff	1,24 %	0,94 %	0,98 %	0,99 %
Ponzi PEA Masachusset	6,36 %	4,78 %	13,35 %	15,75 %
Ponzi PEA USA	3,30 %	3,47 %	4,64 %	4,86 %

4 Análisis del impacto del Caso Cabrera en Ecuador

En el Ecuador, fueron factores económicos, como el proceso de la dolarización y su influencia en el acceso al crédito, los que hicieron que la estafa provocada por José Cabrera siguiera, sin que los organismos de control puedan detectarla, hasta el año 2005.

Efectuando una comparación con los datos obtenidos a través de la simulación del caso Cabrera y los datos de la Población Económicamente Activa nacional, urbana y rural registrada desde el año 1990, tenemos que, para el año 2001 el número de clientes, según la simulación del caso Cabrera no sobrepasa la PEA rural. En los posteriores años, el número de clientes es superior con un 38 % para el año 2003, 51 % para el año 2004, 71 % para el año 2005. Lo mismo sucede con la PEA urbana; en el año 2004, el número de clientes es superior en un 4 % y para el 2005 es superior en un 42 %. Además, se puede conocer que, al llegar a diciembre 2005, el número de clientes sobrepasaría la PEA nacional en un 13 %.

A partir de las cifras de la PEA por provincias, conforme al Censo de Población y Vivienda 2001, podemos conocer el número aproximado de afectados de cada provincia (% PEA afectada⁷ - Tabla 15).

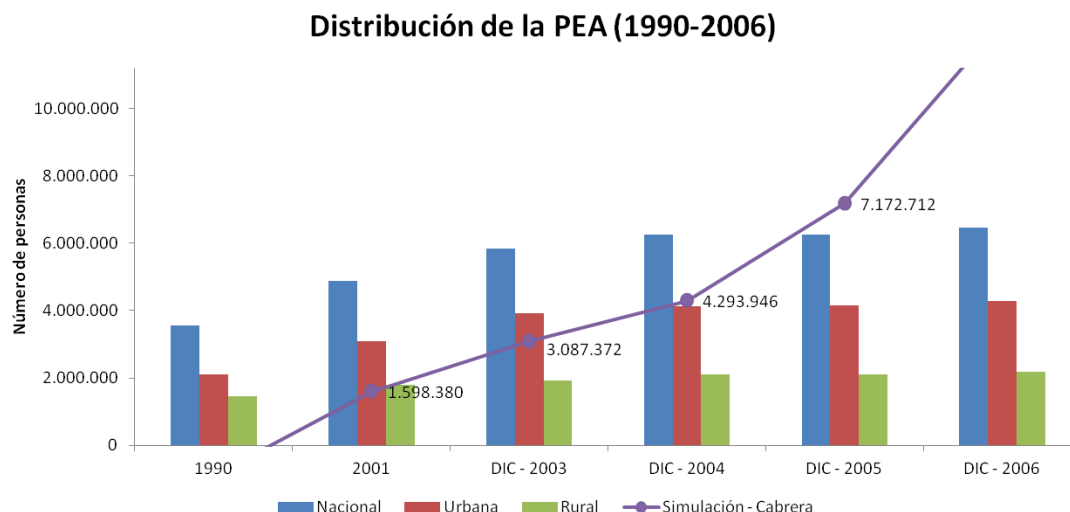


Figura 9. Distribución de la PEA (1995-2006). Fuente: Censos de Población y Vivienda 1990, 2001; Encuesta Nacional de Empleo y Subempleo 2003, 2004, 2005, 2006 (INEC, 2006).

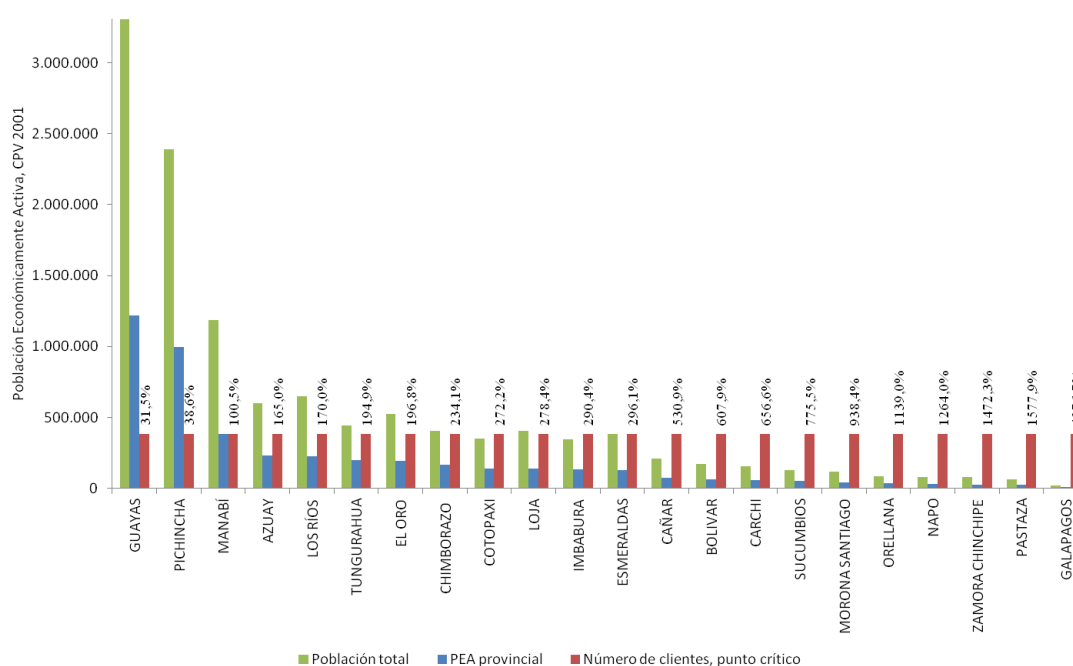


Figura 10. Población Total y PEA afectados en el caso Cabrera. Fuente: Elaboración propia.

Cuando se llega al punto crítico, el número de clientes ya supera en un 0.5 % la PEA de Manabí, en un 49 % la PEA de El Oro y en un 94 % la PEA de Pastaza, según se puede observar en la Figura 10.

5 Conclusiones

Con la implementación del algoritmo matemático y el uso de la simulación, se ha relacionado datos investigados con los posibles escenarios de comportamiento de algunas pirámides financieras.

La empresa captadora de dinero no depende necesariamente de un capital inicial fuerte, puesto que el pago de intereses de la inversión de los clientes se realiza con dinero de nuevos clientes que ingresan a la pirámide. Por tanto, la empresa puede disponer del monto inicial de inversión más la tasa de retorno ofrecida a los primeros clientes.

Mientras la tasa de retorno se incrementa, el tiempo que dura la pirámide es menor, de igual forma depende del lapso en que los valores son cancelados a los clientes.

El monto de retiro es mínimo con respecto al tamaño de la estafa.

Tabla 15. Población Total y PEA afectada. Fuente: INEC, Censo de Población y Vivienda 2001.

Provincia	Población total	PEA	% PEA afectada
Guayas	3.309.034	1.220.389	31,5 %
Pichincha	2.388.817	995.452	38,6 %
Manabí	1.186.025	382.106	100,5 %
Azuay	599.546	232.664	165,0 %
Los Ríos	650.178	225.875	170,0 %
Tungurahua	441.034	197.033	194,9 %
El Oro	525.763	195.046	196,8 %
Chimborazo	403.632	164.009	234,1 %
Cotopaxi	349.540	141.062	272,2 %
Loja	404.835	137.885	278,4 %
Imbabura	344.044	132.200	290,4 %
Esmeraldas	385.223	129.655	296,1 %
Cañar	206.981	72.319	530,9 %
Bolívar	169.370	63.151	607,9 %
Carchi	152.939	58.471	656,6 %
Sucumbíos	128.995	49.509	775,5 %
Morona Santiago	115.412	40.911	938,4 %
Orellana	86.493	33.706	1139,0 %
Napo	79.139	30.375	1264,0 %
Zamora Chinchipe	76.601	26.076	1472,3 %
Pastaza	61.779	24.332	1577,9 %
Galápagos	18.640	8.772	4376,7 %

Referencias

- Angulo, A., D. Araujo, U. , E. Carvajal, M. Cedeño, G. Co-la, P. Coronel, B. Moyano y J. Tibanlombo. 2005. *La ruleta rusa*. EDIMPRES S.A., Quito, Ecuador.
- Artzrouni, M. 2009. *The mathematics of Ponzi schemes*. *Mathematical Social Sciences*, (58): 190–201.
- Banco mundial. *Población activa, total*. Disponible en: <http://datos.bancomundial.org/indicador>, consultado en Septiembre 9, 2012.
- Colombia, Banco de la República. *Indicador bancario de referencia*. Disponible en: <http://www.banrep.gov.co/series-estadisticas/Contingencia/IBR/Plazoovernight.xls>, consultado en Agosto 20, 2012.
- DeWitt, L. *Ponzi Schemes vs. Social Security*. Disponible en: <http://www.ssa.gov/history/ponzi.htm>, consultado en Noviembre 4, 2012.
- Friedman, M. y A. Schwartz. 1963. *A Monetary History of the United States, 1867-1960*. Número frie63-1 en NBER Books, National Bureau of Economic Research, Inc, URL <http://ideas.repec.org/b/nbr/nberbk/frie63-1.html>.
- INEC. 2006. *Pobreza y desigualdad*. Resultados de la Encuesta de Condiciones de Vida - Quinta Ronda, URL http://www.inec.gob.ec/estadisticas/index.php?option=com_repository&Itemid=&func=download&id=182&chk=47111d97fef805a578812fd2526b86a2&no_html=1&lang=es.
- Kitchens, T. 1993. *Cash flow analysis method: following the paper trail in ponzi schemes*. *FBI Law Enforcement Bulletin*, 62(8): 10–13, URL <https://www.ncjrs.gov/pdffiles1/Digitization/144711NCJRS.pdf>.
- Markopolos, H. 2010. *No One Would Listen: A True Financial Thriller*. John Wiley Sons Limited , Inc., Chichester, Reino Unido.
- Mayorga-Zambrano, J. 2011. *Un Modelo Matemático para Esquemas Piramidales Tipo Ponzi*. *Analítica*, 1(1): 119–129.
- Monzó, J. 2008. *¿Por qué colapsan las pirámides financieras? Caso Madoff*. Pensamiento Sistémico, <http://jmonzo.blogspot.com>.
- Paredes, M. 2009. *Las pirámides financieras: Colombia*. Estudios y Análisis Técnicos - Estudios Macrofinancieros, Superintendencia de Bancos y Seguros del Ecuador.
- United States Attorney Southern District of New York. March 12, 2009. *Bernard l. madoff pleads guilty to eleven-count criminal information and is remanded into custody*. Release of the Department of Justice.
- United States Census Bureau. *Fourteenth census of the united states*. Disponible en: <http://www2.census.gov/prod2/decennial/documents/41084484v1ch1.pdf>, consultado en Noviembre 24, 2012.
- Weitmann, A. 2009. *El caso Madoff: Los secretos de la estafa del siglo*. LA ESFERA DE LOS LIBROS, Madrid, España.

ANEXO

A Caso Carlo Ponzi (1919-1920)

Carlo Ponzi fundó en Boston (EE.UU.), en 1919, una empresa denominada Securities Exchange Col. Más de 10 mil norteamericanos invirtieron en su negocio, que ofrecía un retorno de inversión, del 100 % trimestral (Artzrouni, 2009); como respuesta, la Reserva Federal subió las tasa de interés de 4,75 % en noviembre de 1919, a 6 % en enero de 1920 y finalmente a 7 % en junio (Friedman y Schwartz, 1963). En tan sólo siete meses, Ponzi había acumulado alrededor de 10 millones de dólares (Artzrouni, 2009), o un monto de estafa aproximado de 14,5 millones de dólares (Kitchens, 1993).

En 1920, la empresa de Ponzi es investigada; la pirámide deja de funcionar por la auditoría y por la orden de cierre que emitieron las autoridades (Kitchens, 1993). Cabe recalcar que, según puede observarse a partir de la simulación, la pirámide no alcanza el punto crítico al momento de cierre de sus operaciones.

Escenario de simulación:

Consideramos el caso de Ponzi tomando en cuenta la PEA del año 1920 para Estados Unidos (82'739.315 habi-

tantes) (United States Census Bureau), con los siguientes parámetros:

Tabla 16. Parámetros de simulación - Caso Carlo Ponzi - PEA EE.UU. Fuente: Elaboración propia.

Parámetro	Valor
E_0	10'000000
ω	10 %
i_p	100 %
h	3
m	100
c_0	1000
η	4,75 %

A continuación, se presentan las tablas con los resultados:

Tabla 17. Resumen de datos Punto Crítico (PC), Punto de Saturación (PS) - Caso Carlo Ponzi - PEA, EE.UU. Fuente: Elaboración propia.

Parámetro	Antes PC	PC	Antes PS	PS
Periodo	3	4	13	14
Tiempo	0años,9meses	1años,0meses	3años,3meses	3años,6meses
Número de clientes	38.594	127.464	4.874'339.019	12.051'160.765
Expansión de capital (miles)	11.486,77	12.045,25	18.733,02	19.620,69
Tamaño de estafa (millones)	10,97	37,14	1'741.757,82	4'482.740,87
Retiros (miles)	361,60	1.287,27	80'882.991,50	218'069.559,03
Estado financiero (millones)	3,96	-13,90	-1'370.435,15	-3'605.932,60
Capital real (millones)	14,83	23,14	123.545,91	-180.999,32
Capital promedio	405,02	189,66	48,13	-18,24

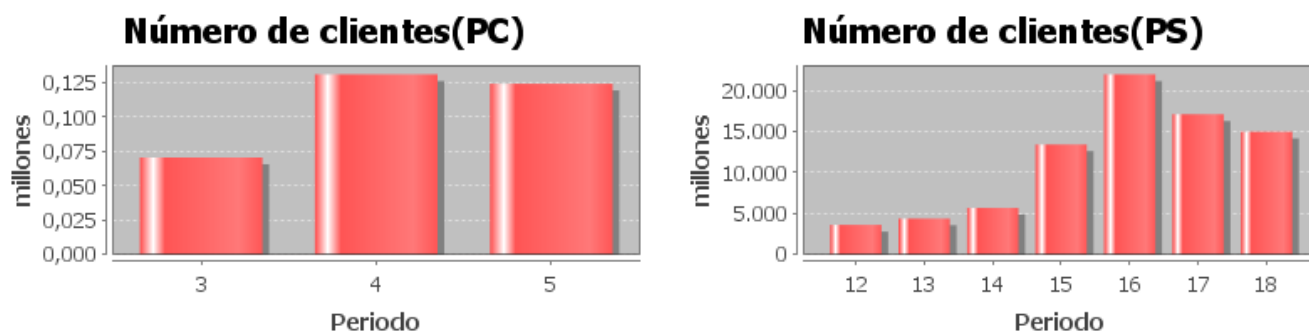


Figura 11. Número de clientes - Caso Carlo Ponzi - PEA, EE.UU. a) punto crítico b) punto de saturación. Fuente: Elaboración propia.

Analizando la Tabla 17, el número de clientes crece de forma acelerada de tal suerte que, al llegar al punto crítico, el número de clientes se ha incrementado en un 330 %, ello representaría el 0,15 % de la PEA (Banco mundial) de Esta-

dos Unidos, el 3,31 % de la PEA del estado de Masachusset y el 17,04 % de la población de la ciudad de Bonton, correspondiente al año de 1920.

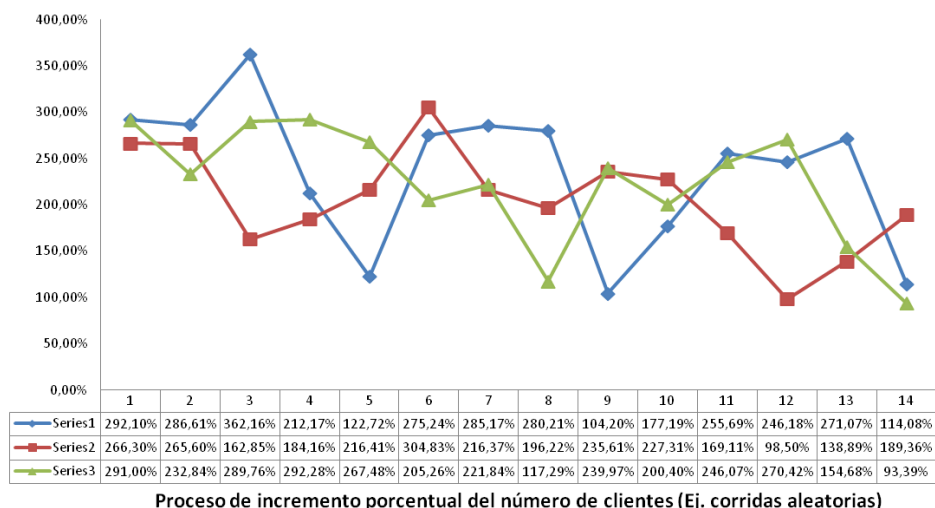


Figura 12. Variación porcentual del número de clientes - Caso Carlo Ponzi - PEA, EE.UU. Fuente: Elaboración propia.

En la Figura 12, apreciamos el incremento porcentual del número de clientes hasta que la pirámide financiera deja de funcionar. Puede observarse que el porcentaje de incremento en cada periodo sobrepasa el 100 %

Al llegar al punto de saturación, se ha sobrepasado el total de la población mundial, según lo observado en la Tabla 17.

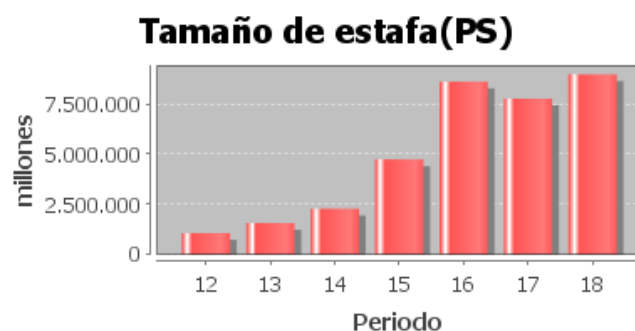
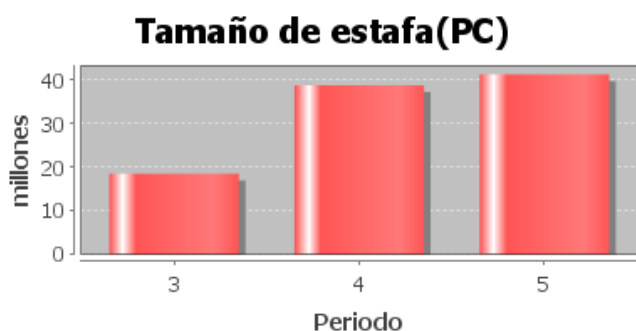


Figura 13. Tamaño de estafa - Caso Carlo Ponzi - PEA, EE.UU. a) punto crítico b) punto de saturación. Fuente: Elaboración propia.

El incremento porcentual de la expansión de capital entre el punto crítico y el punto de saturación sobrepasa el 63%. El tamaño de la estafa sufre un incremento porcentual de 157% al llegar al punto de saturación. El 3,5% del tamaño de estafa ha sido retirado por los inversores al llegar al punto crítico y en el punto de saturación es 4,7%.

Consideramos el caso de Ponzi tomando en cuenta la PEA de 1920 para el estado de Massachusetts (1'728.318), por cuanto la ciudad de Boston pertenece a dicho estado:

A continuación, se presentan las tablas con los resultados:

Tabla 18. Resumen de datos Punto Crítico (PC), Punto de Saturación (PS) - Caso Carlo Ponzi - PEA, Massachusetts. Fuente: Elaboración propia.

Parámetro	Antes PC	PC	Antes PS	PS
Periodo	5	6	9	10
Tiempo	(1años, 3meses)	(1años, 6meses)	(2años, 3meses)	(2años, 6meses)
Número de clientes	10.779	16.971	56.112	81.454
Expansión de capital (miles)	12.850,33	13.451,86	14.955,68	15.668,36
Tamaño de estafa (millones)	9,43	18,34	72,76	114,52
Retiros (miles)	600	876,26	9.716,86	18.033,32
Estado financiero (millones)	3,22	-5,36	-67,25	-124,26
Capital real (millones)	12,55	12,88	5,41	-9,84
Capital promedio	1377,51	944,94	176,5	-196,3

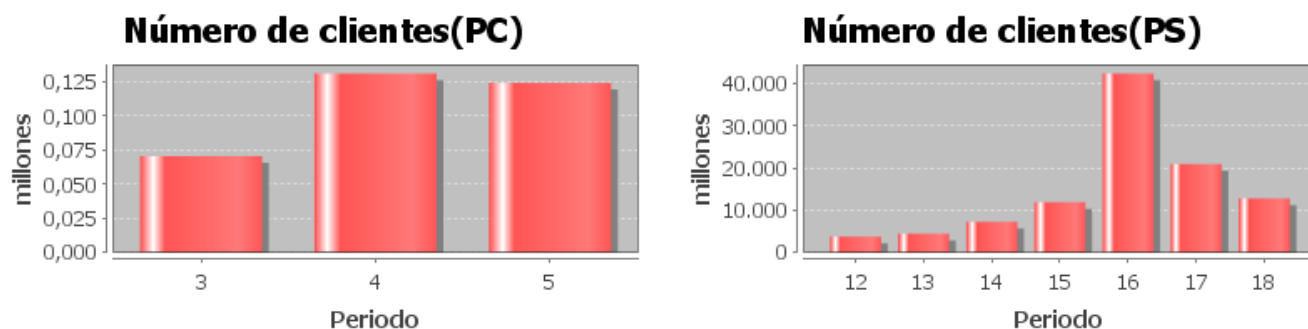


Figura 14. Número de clientes - Caso Carlo Ponzi - PEA, Massachusetts. a) punto crítico b) punto de saturación. Fuente: Elaboración propia.

Analizando la Tabla 18, el número de clientes tiene una variación porcentual de 57 % al llegar al punto crítico.

En la Figura 15, apreciamos el incremento porcentual del número de clientes hasta que la pirámide financiera deja de funcionar. En algunos casos, sobrepasa el 100 %, cuando se aproxima al punto de saturación.

El tamaño de la estafa tiene un incremento porcentual de aproximadamente 524 % al llegar al punto de saturación. El 4,78 % del tamaño de estafa ha sido retirado por los inversores al llegar al punto crítico; en el punto de saturación, el monto de retiro se aproxima al 15,75 %.

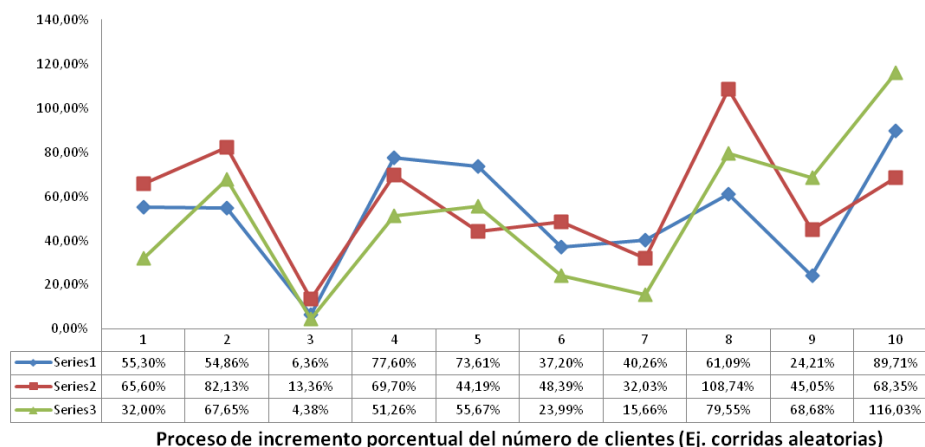


Figura 15. Variación porcentual del número de clientes - Caso Carlo Ponzi - PEA, Massachusetts. Fuente: Elaboración propia.

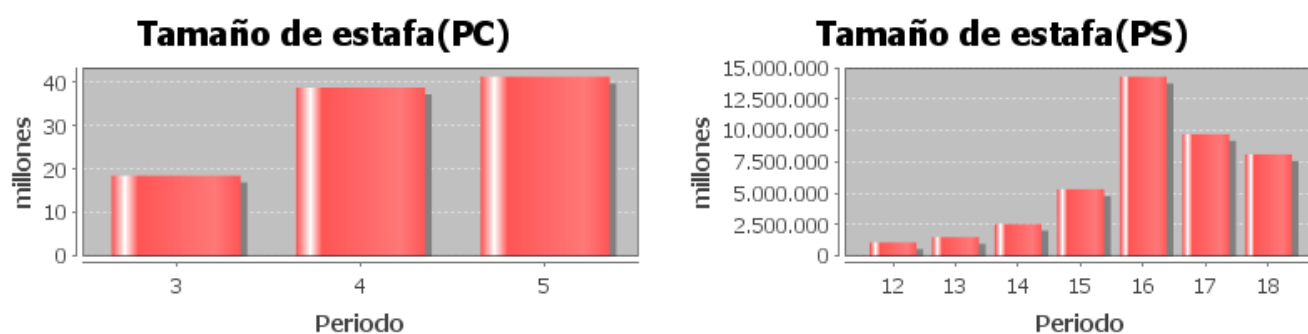


Figura 16. Tamaño de estafa - Caso Carlo Ponzi - PEA, Massachusetts. a) punto crítico b) punto de saturación. Fuente: Elaboración propia.

B Algoritmo general

Algorithm 1: $(T_c, T_s) = \text{Ponzi}(h; c_0, \mathcal{U}, a, b, nSim; m, E_0; i_p, \bar{\eta}, \sigma_1, \sigma_2; d_0, d_1, \omega_*)$	
	Input: $h; c_0, \mathcal{U}, a, b, nSim; m, E_0; i_p, \bar{\eta}, \sigma_1, \sigma_2; d_0, d_1, \omega_*$
	Output: (T_c, T_s)
	// Initialize
1	$t_0 \leftarrow 0; p_0 \leftarrow c_0; C_0 \leftarrow c_0;$
2	$\omega^* \leftarrow \frac{i_p}{1+i_p}; \alpha \leftarrow \frac{d_1\omega^* - d_0\omega^*}{d_1d_0^2 - d_0d_1^2}; \beta \leftarrow \frac{d_0^2\omega^* - d_1\omega^*}{d_1d_0^2 - d_0d_1^2};$
3	$L_0 \leftarrow E_0 + m; \gamma \leftarrow \frac{E_0}{m}; \lambda_0 \leftarrow \frac{L_0}{m}; F_0 \leftarrow E_0 - i_p \cdot m \cdot c_0; \mathcal{L}_0 \leftarrow \frac{L_0}{C_0};$ // Process
4	for $sMont = 0, 1, \dots, nSim$ do
5	$S_0 \leftarrow 1 - \frac{1}{\Gamma}; I_0 \leftarrow \frac{1}{\Gamma}; S(t_0) \leftarrow S_0; I(t_0) \leftarrow I_0;$
6	$k \leftarrow 1; Z \leftarrow L_0; paux \leftarrow (\text{Math.abs}(a) + \text{Math.abs}(b)) / \text{periodo}; haux \leftarrow a;$
7	while $Z > 0$ do
8	$t_k \leftarrow k \cdot h;$
9	$haux \leftarrow haux + paux;$
10	$S(t_k) \leftarrow -a \cdot haux \cdot S(t_{k-1}) \cdot I(t_{k-1}) + S(t_{k-1});$
11	$I(t_k) \leftarrow haux \cdot (a \cdot S(t_{k-1}) \cdot I(t_{k-1}) - b \cdot I(t_{k-1})) + I(t_{k-1});$
12	$\bar{N}_k \leftarrow \frac{I(t_k)}{I(t_{k-1})} - 1; N_k \leftarrow \text{Normal}(\bar{N}_k, 1/4);$
13	$c_k \leftarrow N_k \cdot C_{k-1}; C_k \leftarrow C_{k-1} + c_k;$
14	for $j = 0, 1, \dots, k$ do
15	if $k - j \leq d_1$ then $\bar{\omega}_{k,j} = (k - j) \cdot [\alpha \cdot (k - j) + \beta];$ else $\bar{\omega}_{k,j} = \omega^*;$
16	$\omega_{k,j} \leftarrow \text{Normal}(\bar{\omega}_{k,j}, \sigma_1^2);$
17	if $j < k$ then $p_{k,j} \leftarrow p_{k-1,j} \cdot (1 - \omega_{k,j})(1 + i_p);$ else $p_{k,j} \leftarrow c_k;$
18	end
19	for $l = 0, 1, \dots, k - 1$ do
20	$\eta_l \leftarrow \text{Normal}(\bar{\eta}, \sigma_2^2)$
21	end
22	$P_k \leftarrow m \cdot \sum_{j=0}^k p_{k,j}; E_k \leftarrow E_0 \cdot \prod_{l=0}^{k-1} (1 + \eta_l);$
23	$\hat{P}_k \leftarrow P_k + E_k;$
24	$w_k \leftarrow (1 + i_p) \cdot \sum_{j=0}^{k-1} \omega_{k,j} p_{k-1,j}; W_k \leftarrow m \cdot w_k;$
25	$\lambda_k \leftarrow (1 + \eta_{k-1}) \cdot \lambda_{k-1} + c_k - w_k; L_k \leftarrow m \cdot \lambda_k;$
26	$F_k \leftarrow F_{k-1} - P_k \cdot i_p + \eta_{k-1} \cdot L_{k-1};$
27	for $j = 0, 1, \dots, k - 1$ do
28	$U_j \leftarrow m \cdot \left[c_j - \sum_{l=j+1}^k \omega_{l,j} \cdot p_{l,j} \right];$
29	end
30	$U_k \leftarrow m \cdot c_k; R_k \leftarrow \sum_{j=0}^k U_j;$
31	$\mathcal{L} \leftarrow \frac{L_k}{C_k}; \mathcal{E}_k \leftarrow \frac{\lambda_k - \gamma}{w_k};$
32	$Z \leftarrow L_k; k \leftarrow k + 1;$
33	end
34	end