

Número de clientes, tiempo y volumen de estafa ocasionada por inversiones piramidales tipo Ponzi

Quituisaca-Samaniego, L[†], Mayorga-Zambrano, J[‡] y Medina, P[§]

[†] *Dirección de Estudios Analíticos Estadísticos, Instituto Nacional de Estadística y Censos, Quito, Ecuador*

[‡] *Pontificia Universidad Católica del Ecuador Sede Ambato, Ambato, Ecuador*

[§] *Instituto Gregorio Millán, Universidad Carlos III de Madrid, Madrid, España*

[§] *Departamento de Ciencias Exactas, Universidad de la Fuerzas Armadas, Quito, Ecuador*

[†]lilia.quituisaca.samaniego@gmail.com, [‡]jrmayorgaz@gmail.com,
[§]pmedinavz@gmail.com

Resumen

Tomando como base el algoritmo que describe el proceso piramidal tipo Ponzi, se realiza de forma recurrente la simulación del modelo matemático planteado en un estudio anterior, lo que permite comparar datos periodísticos con los datos que genera el software desarrollado, como son: el número de clientes, monto de estafa, tiempo estimado de duración de la pirámide.

Palabras clave: modelamiento matemático, pirámides financieras, esquemas Ponzi, procesos estocásticos, simulación.

Abstract

Based on the algorithm that describes the process Ponzi, we performed recurrently the simulation of the mathematical model proposed in a previous study, allowing comparison of data of news with to data generated by the software developed, such as: the number of customers, money's amount of fraud, estimated duration of the pyramid.

Keywords: mathematical modeling, financial pyramidal schemes, Ponzi schemes, stochastic processes, simulation.

Código JEL: C61, C63, C02, C12.

1. Introducción

La presencia de pirámides financieras, en nuestro entorno, ha sido el motivo para estudiar y desarrollar “Un modelo matemático para esquemas piramidales tipo Ponzi” [11]. La crisis financiera internacional hace referencia a la aparición o incremento de pirámides financieras en diferentes países, se tiene conocimiento de famosas y conocidas estafas en España, Albania, Rumania, Estados Unidos, Colombia, etc.

Bernard Madoff a través de su firma de inversiones, fundada en 1960, maquinó el mayor fraude financiero en la historia de EEUU, estuvo activo más de dos décadas; se proporcionaban beneficios anuales del 8% y el 12% al inicio, [9], del 10% y el 15%, “*lo cual es algo extraordinariamente bueno, pero no escandalosamente bueno*”, [12]. En su pirámide existieron grandes ahorradores privados, bancos, fondos de riesgo, profesionales de las finanzas, entre otros. A partir de la década de los 90, Madoff fue investigado por organismos reguladores y denunciado por varias empresas, pero lograba superar las inspecciones de la Comisión de Mercados y Valores (SEC). Las operaciones de inversión de Madoff fueron denunciadas como un esquema piramidal tipo Ponzi(PZ) en 1999 por H. Markopolos, [10], y a finales del año 2008 fueron declaradas legalmente como fraude; el 29 de junio del 2009 fue sentenciado a 150 años de cárcel, [14]. Por otro lado, se debe tener presente que en 1993 la FBI dió a conocer abiertamente el Método de Análisis de Flujo de Efectivo, [9], para seguir el rastro contable dejado por un PZ. Esta metodología de la Contabilidad Forense había servido de base para que en 1987 la Corte Superior del Condado Ventura, California, declarara culpable de fraude por un PZ a Charles Hodson.

Este tipo de estafa ha desencadenado crisis económicas, financieras y sociales que han evidenciado entre otras cosas: inusuales niveles de inversión, retorno fuera de los niveles de mercado, lavado de dinero, etc.

De todo lo mencionado anteriormente, Ecuador no ha sido la excepción, de hecho en el año 2005 se evidenció en el país el conocido caso del notario Cabrera, que perjudicó a miles de clientes nacionales y extranjeros, entre ellos varios jueces, políticos, banqueros, policías y militares [1].

Es importante tener presente que un PZ “*se disfraza fácilmente de una empresa mediadora de inversiones [...] Por lo general, los clientes no saben que son participantes de un esquema Ponzi*”, [11]. Por otro lado, la tasa de retorno ofertada por un esquema piramidal es inversamente proporcional a su tiempo de duración, [11]; es en este contexto que a los esquemas PZ se les refiere también como *pirámides cerradas* (con un retorno máximo del 300% anual) en tanto que a los esquemas piramidales no-Ponzi se les denomina *pirámides abiertas* o *células de abundancia*(con un retorno mínimos del 800% anual).

Este trabajo está estructurado de la siguiente manera: En la Sección 2 se revisan algunos conceptos, fórmulas y variables usadas en el desarrollo del algoritmo (ver Anexo 1). En la Sección 4 se presenta el resultado de esquemas piramidales tipo Ponzi: Caso Cabrera, Proyecciones D.R.F.E., Caso Madoff. En la Sección 5 se describe la implicación generada por el caso Cabrera en el Ecuador, especialmente en la provincia de El Oro. En la Sección 6 se agrega

conclusiones generales de la simulación.

2. Marco teórico

Este trabajo está motivado por los trabajos de Mayorga-Zambrano, [11], y Artzrouni, [2], que son pioneros en el estudio de esquemas PZ desde un punto de vista matemático. En [2] el estudio se centra en la evolución de $L(t)$, el capital real al tiempo t ; se lo considera continuo en el tiempo y se usa el modelo determinístico

$$L(t + dt) = L(t) (1 + \eta dt) + p(t)dt - W(t)dt. \quad (2.1)$$

La estructura de (2.1) es análoga a la sucesión de recurrencia

$$L_k = (1 + \eta_{k-1})L_{k-1} + P_{k,k} - W_k,$$

planteada en [11], esto es, el capital real en un instante posterior se desglosa en tres términos:

1. la expansión por inversiones legítimas del capital real al instante previo: η (respectivamente η_{k-1}) representan la correspondiente tasa nominal;
2. el ingreso de dinero fresco, $p(t)dt$ (respectivamente $P_{k,k}$), producto de las captaciones a clientes nuevos; y
3. la filtración de dinero producto de retiros que hacen los clientes, $W(t)dt$ (respectivamente W_k).

El modelo desarrollado en [11] es estocástico; el autor hace la simulación de una versión bastante simplificada que permite describir el comportamiento cuasi-exponencial de un esquema PZ:

$$\begin{cases} \mathcal{C}_k - \mathcal{C}_{k-1} = N_k \cdot \mathcal{C}_{k-1}, & k \in \mathbb{N}, \\ \mathcal{C}_0 = c_0, \end{cases}$$

donde \mathcal{C}_k es el número de clientes en el instante de transacciones t_k . En [2] el autor asume un comportamiento exponencial de PZ, esto es supone que la rapidez con que evoluciona la densidad de dinero fresco que entra al sistema está dada por

$$\begin{cases} p(t + dt) - p(t) = r_i p(t) dt, & t \geq 0, \\ p(0) = p_0, \end{cases} \quad (2.2)$$

donde r_i es referido como la tasa de inversiones.

Con el modelo de [11] es posible hacer un seguimiento de otras variables de interés e.g. el robo pecuniario y el monto legal del fraude, el punto crítico de PZ (definido en términos del estado financiero de la captadora) y el punto de saturación de PZ (definido en términos del capital real de la captadora). Asimismo se establece al capital promedio como un índice de referencia sobre la viabilidad futura del esquema. Por otro lado, el modelo de [2] permite estudiar un tipo de esquemas PZ cuyo comportamiento es similar al de sistemas de pensiones; esto no es abordado en [11].

Estimamos que una de las razones principales para la demora en la detención de Madoff yace en la ausencia de herramientas matemáticas que complementen

al seguimiento de rastros contables, anteriormente mencionado. Por ello, en el presente trabajo implementamos el algoritmo general de [11]. La aplicación desarrollada bajo la plataforma JAVA, permite modificar los parámetros iniciales conforme el caso de fraude concreto a describir y con el propósito de mejorar el nivel explicativo de los resultados se generan gráficas descriptivas.

3. El modelo

En esta sección haremos una revisión breve del modelo desarrollado en [11]. Es importante resaltar que para el modelamiento se tomaron en consideración criterios basados en el comportamiento observado (muchas veces periodísticamente) en las personas afectadas por PZ. Por ejemplo, la formulación (3.38) fue motivada por la experiencia observada durante la crisis de pirámides de 2008 en el sur de Colombia y norte de Ecuador donde un alto porcentaje de clientes de PZ eventualmente dejaron de trabajar para vivir exclusivamente de las ganancias.

3.1. Formulación matemática

3.1.1. Notación

Empezamos con la notación necesaria.

Tabla 1. Notación de magnitudes en un PZ

Not.	Magnitud	Descripción / Comentario
$D(t)$	Tamaño legal de la estafa	Obligaciones de PZ en papeles
$E(t)$	Expansión del capital inicial E_0	Resultado de inversiones legítimas
i_p	Taza de retorno	Interés que ofrece PZ para un período de inversión h
$R(t)$	Robo pecuniario total	Dinero extraído del pecunio de los clientes
$F(t)$	Estado financiero	El patrimonio de PZ es despreciable
$L(t)$	Capital real total	Dinero que tiene PZ
m	Inversión inicial	Monto del primer depósito de un cliente
t_k	Tiempo de la transacción k	Período de inversión
$\mathcal{C}(t)$	Número total de clientes	Todos los clientes que están en el sistema PZ
N_k	Factor de expansión	Cantidad de clientes nuevos por cada cliente antiguo
c_k	Número de clientes nuevos	Clientes nuevos al tiempo t_k
$P_{k,j}$	Captación teórica en t_k de ingresados en t_j	Dinero que el cliente supone tener en su cuenta piramidal
$\omega_{k,j}$	Tasa de retiros en t_k de ingresados en t_j	Retiros de los clientes
$P(t)$	Captación teórica total	Dinero no real captado
η_k	Tasa nominal	De inversión de PZ en t_k^+
$\tilde{P}(t)$	Capital teórico total	Dinero que PZ finge tener en sus arcas
$P_{k,k}$	Dinero fresco que entra a PZ en t_k	Montos depositados por nuevos clientes
W_k	Total de retiros en t_k	Retiros realizados por los clientes
$U_{j,k}(t)$	Robo pecuniario en t_k a ingresados en t_j	Monto de dinero que el sistema ha estafado
$\mathcal{L}(t)$	Capital promedio	Para hacer seguimiento del deterioro de PZ
$\mathcal{E}(t)$	Efectividad del sistema	Ganancia por una unidad monetaria pagada

3.1.2. Relaciones básicas

El modelo es descrito por las siguientes relaciones.

$$t_k = k \cdot h, \quad k = 0, 1, \dots, K, \quad h = 1, 2, \dots, H, \quad (3.3)$$

$$T_c = K_c \cdot h, \quad (3.4)$$

$$T_s = K_s \cdot h, \quad (3.5)$$

$$D(t) = (1 + i_p) \cdot [\hat{P}(t) - E(t)], \quad (3.6)$$

$$\mathcal{C}(t) = \mathcal{C}_k, \quad t \in [t_k, t_{k+1}), \quad (3.7)$$

$$c_k = N_k \cdot \mathcal{C}_{k-1}, \quad (3.8)$$

$$\mathcal{C}_k = \sum_{j=0}^k c_j, \quad (3.9)$$

$$P_{k,j} = m \cdot p_{k,j}, \quad (3.10)$$

$$p_{k,j} = \begin{cases} 0, & \text{si } j > k, \\ c_k, & \text{si } j = k, \\ p_{k-1,j} \cdot (1 - \omega_{k,j})(1 + i_p), & \text{si } j < k. \end{cases} \quad (3.11)$$

$$P(t) = P_k, \quad t \in [t_k, t_{k+1}), \quad (3.12)$$

$$P_k = \sum_{j=0}^k P_{k,j}, \quad (3.13)$$

$$\hat{P}(t) = P(t) + E(t), \quad (3.14)$$

$$E(t) = E_0 \prod_{l=0}^{k-1} (1 + \eta_l), \quad t \in [t_k, t_{k+1}), \quad (3.15)$$

$$L(t) = L_k, \quad t \in [t_k, t_{k+1}), \quad (3.16)$$

$$P_{k,k} = m c_k, \quad (3.17)$$

$$\begin{cases} L_0 = E_0 + m c_0, \\ L_k = (1 + \eta_{k-1})L_{k-1} + P_{k,k} - W_k, \end{cases} \quad (3.18)$$

$$\begin{cases} W_k = m \cdot w_k, \\ w_k = (1 + i_p) \sum_{j=0}^{k-1} \omega_{k,j} p_{k-1,j}. \end{cases} \quad (3.19)$$

$$D(t) = D_k, \quad t \in [t_k, t_{k+1}), \quad (3.20)$$

$$D_k = (1 + i_p) \cdot P_k, \quad (3.21)$$

$$R(t) = R_k, \quad t \in [t_k, t_{k+1}), \quad (3.22)$$

$$R_k = \sum_{j=0}^k U_{j,k}(t), \quad (3.23)$$

$$U_{j,k}(t) = m \cdot \begin{cases} 0, & \text{si } j > k, \\ c_k, & \text{si } j = k, \\ c_j - \sum_{l=j+1}^k \omega_{l,j} \cdot p_{l,j}, & \text{si } j < k. \end{cases} \quad (3.24)$$

$$\begin{cases} F_0 = E_0 - i_p m c_0, \\ F_k = F_{k-1} - P_k i_p + \eta_{k-1} L_{k-1}, \quad k \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (3.25)$$

$$\mathcal{L}(t) = \frac{L(t)}{\mathcal{C}(t)}, \quad (3.26)$$

$$\mathcal{E}(t) = \frac{L(t) - E_0}{W(t)}. \quad (3.27)$$

Adicionalmente,

$$t_K \leq T < t_{K+1}, \quad (3.28)$$

$$0 < \sigma_1 \ll 1 \quad (3.29)$$

$$N_k \rightsquigarrow \mathcal{N}\left(\bar{N}_k, \frac{1}{4}\right), \quad (3.30)$$

$$\omega_{k,j} \rightsquigarrow \mathcal{N}(\bar{\omega}_{k,j}, \sigma_1^2), \quad (3.31)$$

$$\eta_k \rightsquigarrow \mathcal{N}(\bar{\eta}, \sigma_2^2), \quad (3.32)$$

$$0 < \bar{\eta} \ll i_p, \quad (3.33)$$

$$0 < \sigma_2 \ll 1, \quad (3.34)$$

3.1.3. Evolución del factor de expansión promedio

Para modelar la evolución de los valores esperados \bar{N}_k , nos apoyamos en un modelo SIR¹ sencillo:

$$\bar{N}_k = \frac{\bar{\mathcal{C}}_k}{\bar{\mathcal{C}}_{k-1}} - 1, \quad (3.35)$$

$$\bar{\mathcal{C}}_k = \mathcal{I}(t_k) \cdot \mathcal{U}, \quad (3.36)$$

con

$$\begin{cases} \dot{\mathcal{S}} = -a \mathcal{S}(t) \mathcal{I}(t), \\ \dot{\mathcal{I}} = a \mathcal{S}(t) \mathcal{I}(t) - b \mathcal{I}(t), \\ \mathcal{S}(0) = 1 - \frac{1}{\mathcal{U}}, \\ \mathcal{I}(0) = \frac{1}{\mathcal{U}}, \end{cases} \quad (3.37)$$

donde \mathcal{S} representa la fracción de la PEA (población económicamente activa) susceptible de ser estafado e \mathcal{I} denota la fracción de la PEA que ya está estafada. Aquí \mathcal{U} es el tamaño real de la PEA en la región de influencia de PZ. Aquí se ha supuesto que las variables aleatorias N_k y \mathcal{C}_{k-1} son independientes.

Observación 3.1. Los parámetros positivos a y b deben ser ajustados por cada caso particular de PZ

3.1.4. Evolución de la tasa de retiros promedio

El valor esperado de la tasa de retiros en t_k de los clientes que ingresaron a PZ al tiempo t_j depende de $d = k - j$, el tiempo de permanencia en el sistema:

$$\bar{\omega}_{k,j} = \begin{cases} (k-j)[\alpha(k-j) + \beta], & \text{si } k-j \leq d_1, \\ \omega^*, & \text{si } k-j > d_1, \end{cases} \quad (3.38)$$

con

$$\alpha = \frac{d_1 \omega^* - d_0 \omega^*}{d_1 d_0^2 - d_0 d_1^2}, \quad \beta = \frac{d_0^2 \omega^* - d_1 \omega^*}{d_1 d_0^2 - d_0 d_1^2},$$

¹Susceptibles (susceptibles a ser estafados), Infectados (estafados) y Recuperados

$$\omega^* = \frac{i_p}{i_p + 1},$$

donde los coeficientes α y β están determinados por los puntos (d_0, ω_*) y (d_1, w^*) que corresponden a los valores esperados de la primera instancia en que el retiro se vuelve significativo y de la primera instancia en que se retira toda la ganancia, respectivamente.

3.1.5. Criterios de parada

En [11] se definen dos criterios de parada teniendo en mente que PZ busca que su tiempo de funcionamiento T sea lo más extenso posible.

El *punto crítico* T_c de PZ es el tiempo que su estado financiero cambia por primera vez de signo:

- (C1) $F(T_c) = 0$;
- (C2) $F(t) > 0$, para todo $t \in (0, T_c)$;
- (C3) Si T_0 verifica i) y ii), entonces $T_c \leq T_0$.

Por otro lado, el *punto de saturación* T_s de PZ es el instante en que su capital real total cambia por primera vez de signo, es decir:

- (S1) $L(T_s) = 0$;
- (S2) $L(t) > 0$, para todo $t \in [0, T)$;
- (S3) Si T_0 verifica i) y ii), entonces $T_s \leq T_0$.

Los puntos crítico y de saturación son variables aleatorias cuyas distribuciones de probabilidad dependen de parámetros del sistema. En [11] se muestra que T_s se presenta cuando el número de clientes nuevos es insuficiente.

3.2. Algoritmo general

La automatización del Algoritmo 1 permite simular el comportamiento de un esquema piramidal propuesto por Mayorga-Zambrano, [11]. Los parámetros iniciales mencionados en la Observación 3.1 son fundamentales para cada simulación; estos se deben elegir de acuerdo a la información encontrada para cada caso concreto de PZ. El algoritmo se implementó bajo la plataforma de desarrollo JAVA con los requerimientos técnicos mínimos². Además, que:

- i) Mantiene funciones auxiliares, como:
 - Normal($\mu; s^2$) : generador de números aleatorios que sigue una distribución $\mathcal{N}(\mu; s^2)$,
 - sir(U, a, b) : generador del número de clientes nuevos (SIR). Para la resolución numérica del modelo SIR (3.37) usamos un esquema de diferencias finitas. Se tiene, para un paso $0 < \epsilon \ll 1$, que

$$\mathcal{S}(t_{j+1}^*) \approx \mathcal{S}(t_j^*)[(1 - a\epsilon\mathcal{I}(t_j^*))] \quad (3.39)$$

y

$$\mathcal{I}(t_{j+1}^*) \approx \mathcal{I}(t_j^*)[1 - b\epsilon + a\epsilon\mathcal{S}(t_j^*)], \quad (3.40)$$

²S.O: Linux, RAM: 512MB, espacio en disco: 58 MB, velocidad: 4 GHz

con la inicialización

$$\mathcal{S}(0) = 1 - \frac{1}{\mathcal{U}}; \quad \mathcal{I}(0) = \frac{1}{\mathcal{U}} \quad (3.41)$$

- ii) Incorpora ciclos repetitivos que calculan en el punto crítico y en el punto de saturación el promedio por frecuencia de cada parámetro para la generación de gráficos estadísticos.
- iii) Genera información resultante de cada caso mediante listas de datos y gráficos descriptivos.

3.3. Validación del algoritmo

3.3.1. DeWitt

Para comprobar la validez de los resultados obtenidos, compararemos éstos con el algoritmo propuesto por DeWitt [5], el cual se fundamenta en que el número de clientes estafados sigue una función exponencial

$$y = 1000(2^n),$$

donde $n = 0, 1, 2, \dots$, y por tanto el resto de variables asociadas cambiará conforme evoluciona el periodo y número de clientes incorporados a la estafa.

Tabla 2.

Payout Rounds	Number of Participants
Round 1	1.000
Round 2	2.000
Round 3	4.000
Round 4	8.000
Round 5	16.000
Round 6	32.000
Round 7	64.000
Round 8	128.000
Round 9	256.000
Round 10	512.000
Round 11	1.024.000
Round 12	2.048.000
Round 13	4.096.000
Round 14	8.192.000
Round 15	16.384.000
Round 16	32.768.000
Round 17	65.536.000
Round 18	131.072.000
Round 19	262.144.000
Round 20	524.288.000

Ponzi Progression Starting with 1.000 "Investors".

Fuente: Social Security Administration [5].

En la Figura 1 se observa que el número de clientes de Ponzi a los siete meses difiere hasta en un 85 % con respecto a la simulación ejecutada y es superior hasta en un 53 % con respecto al proceso que realiza DeWitt [5].

Tabla 3.

Periodos comparativos		Número de clientes		
		Simulación	DeWitt	Datos investigados
0 años, 6 mes/es	APC	8.551	4.000	Sin/Dato(S/D)
0 años, 9 mes/es		38.594	8.000	
1 año, 0 mes/es		127.464	16.000	
7 meses		S/D		Superior a 10 mil

Número de clientes - datos comparativos - caso Ponzi.

Fuente: Elaboración propia.

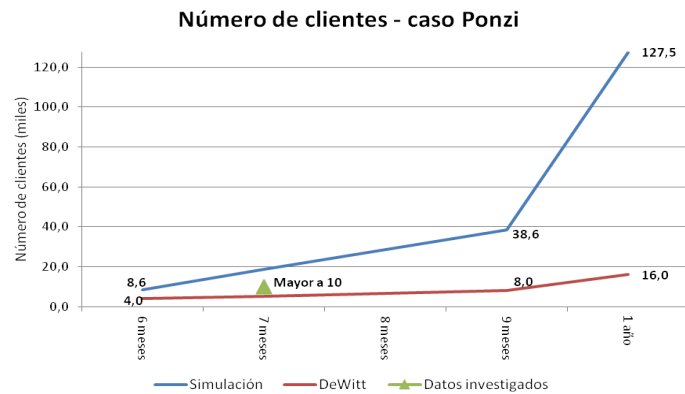


Figura 1: Número de clientes - serie comparativa - caso Ponzi.

En la Figura 2 se observa que el monto de estafa de Ponzi a los siete meses es superior al 50 % respecto a la simulación ejecutada y al proceso que realiza DeWitt [5].

Tabla 4.

Periodos comparativos		Tamaño de estafa (millones)		
		Simulación	DeWitt	Datos investigados
0 años, 6 mes/es	APC	4,38	4,00	S/D
0 años, 9 mes/es		10,97	8,00	
1 año, 0 mes/es		37,14	16,00	
7 meses	PC	S/D		Superior a \$10

Tamaño de estafa - datos comparativos - caso Ponzi.

Fuente: Elaboración propia.

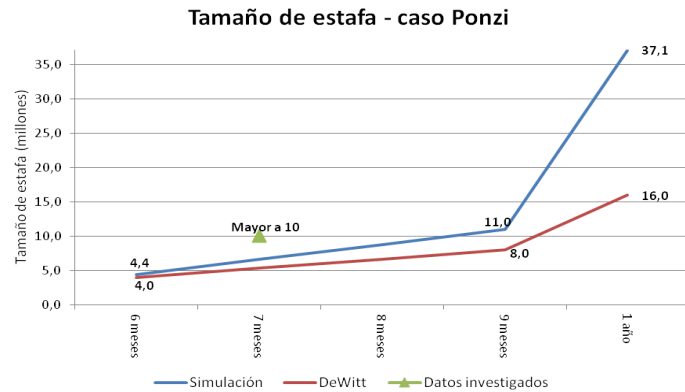


Figura 2: Tamaño de estafa - serie comparativa - caso Ponzi.

3.3.2. Análisis de convergencia y sensibilidad

Se afinan parámetros mediante la simulación el cambio en los valores de los parámetros de ingreso.

Parámetro cambiante: Capital inicial

El capital inicial es directamente proporcional al tiempo en que se establece el Punto Crítico, al igual que la expansión de capital. Por otra parte, se mantiene prácticamente invariante el tiempo en el cual se alcanza el Punto de Saturación.

Parámetro cambiante: Tasa de retorno

Si la tasa de retorno se incrementa se disminuye el tiempo en que se establece el Punto Crítico al igual que el número clientes y el tamaño estafa. Mientras se mantiene el tiempo del Punto de Saturación al igual que la expansión de capital.

Parámetro cambiante: Período básico de inversión (número de meses)

Si se aumenta el número de meses en que se haría efectivo el pago de la tasa de retorno se incrementa el tiempo en que se establece el Punto Crítico y el Punto de Saturación.

Parámetro cambiante: monto de inversión inicial

Si el monto de inversión se incrementa hasta llegar al valor del capital inicial el tiempo en que se establece el Punto Crítico es menor. Se puede observar que se incrementa la expansión de capital, se incrementa el tamaño de la estafa al igual que el monto de retiro. El tiempo en que se establece el Punto de Saturación se mantiene.

4. Resultados de la implementación

En el presente apartado se mostrará los resultados obtenidos a partir de la implementación del algoritmo, para los diferentes casos.

4.1. Caso Ponzi (1919-1920)

Charles Ponzi, fundó en 1919 la empresa denominada Securities Exchange Col, en Boston. Más de 10 mil norteamericanos invirtieron en su negocio, ofrecía un retorno de inversión del 100% trimestral [2], mientras que la Reserva Federal subió las tasa de interés de 4,75% en noviembre de 1919, a 6% en enero de 1920 y finalmente a 7% en junio [7]. En tan sólo siete meses, habría acumulado alrededor de 10 millones de dólares [2] o un monto de estafa aproximado de 14,5 millones de dólares [9].

En 1920 la empresa de Ponzi es investigada, la pirámide deja de funcionar por la auditoría y por la orden de cierre que emitieron las autoridades [9], cabe recalcar que mediante el software de simulación, la pirámide no alcanza el punto crítico al momento de cierre de sus operaciones.

Escenario de simulación:

Consideramos el caso de Ponzi tomando en cuenta la PEA del año 1920 para Estados Unidos (82'739.315 habitantes) [15], con los siguientes parámetros:

Tabla 5.

Parámetro	Valor
E_0	10'000000
ω	10 %
i_p	100 %
h	3
m	100
c_0	1000
η	4,75 %

Parámetros de simulación - Caso Ponzi - PEA EE.UU.

A continuación se presenta las tablas con los resultados:

Tabla 6.

Parámetro	Antes PC	PC	Antes PS	PS
Periodo	3	4	13	14
Tiempo	0años,9mes/es	1años,0mes/es	3años,3mes/es	3años,6mes/es
NumClientes	38.594	127.464	4.874'339.019	12.051'160.765
ExpansiónCapital(miles)	11.486,77	12.045,25	18.733,02	19.620,69
TamañoEstafa(millones)	10,97	37,14	1'741.757,82	4'482.740,87
Retiros(miles)	361,60	1.287,27	80'882.991,50	218'069.559,03
Estado financiero(millones)	3,96	-13,90	-1'370.435,15	-3'605.932,60
Capital real(millones)	14,83	23,14	123.545,91	-180.999,32
Capital Promedio	405,02	189,66	48,13	-18,24

Resumen de datos Punto Crítico (PC), Punto de Saturación (PS) - Caso Ponzi - PEA EE.UU.

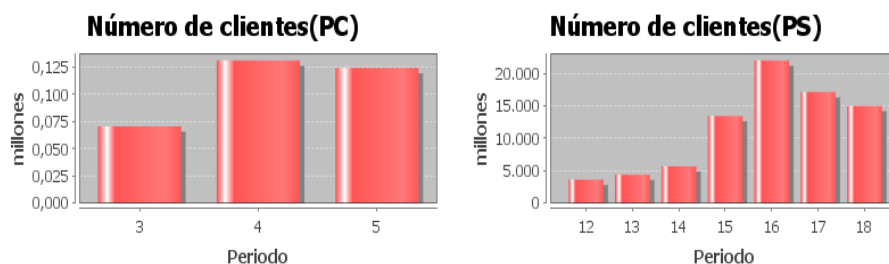


Figura 3: Número de clientes - Caso Ponzi - PEA EE.UU. a) punto crítico b) punto de saturación

Analizando la Tabla 6 el número de clientes crece de forma acelerada, al llegar al punto crítico el número de clientes se ha incrementado en un 330 %, lo que representaría el 0,15 % de la PEA [6] de Estados Unidos, el 3,31 % de la PEA del estado de Masachusset y el 17,04 % de la población de la ciudad de Bonton, correspondiente al año de 1920.

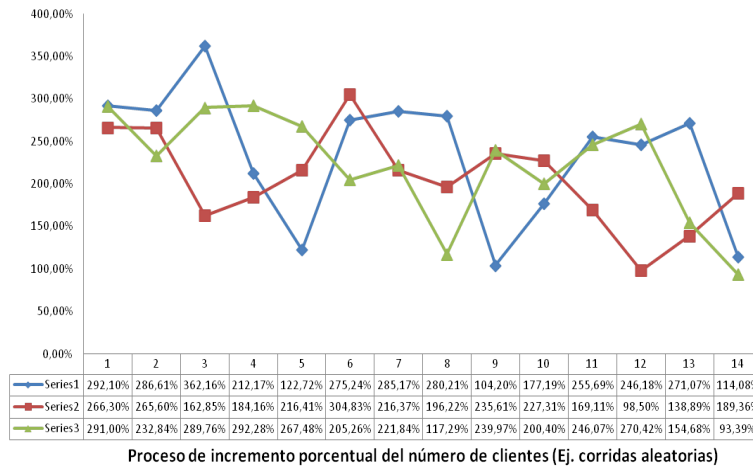


Figura 4: Variación porcentual del número de clientes - Caso Ponzi - PEA EE.UU.

En la Figura 4 apreciamos el incremento porcentual del número de clientes hasta que la pirámide financiera deja de funcionar. Se puede apreciar que el porcentaje de incremento en cada periodo sobrepasa el 100 %

Al llegar al punto de saturación se ha sobrepasado el total de la población mundial, según lo observado en la Tabla 6.

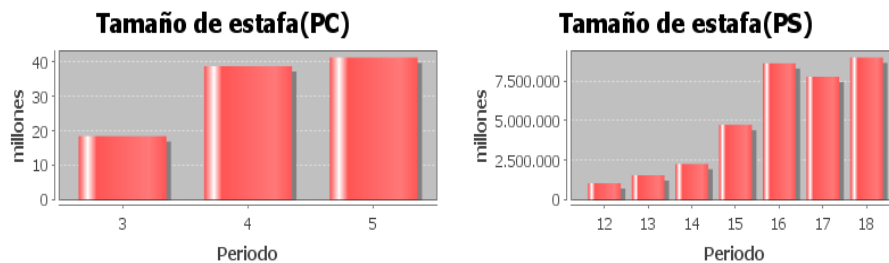


Figura 5: Tamaño de estafa - Caso Ponzi - PEA EE.UU. a) punto crítico b) punto de saturación

El incremento porcentual de la expansión de capital entre el punto crítico y el punto de saturación sobrepasa el 63%. El tamaño de la estafa sufre un incremento porcentual de 157% al llegar al punto de saturación. El 3,5% del tamaño de estafa ha sido retirado por los inversores al llegar al punto crítico y en el punto de saturación es 4,7%.

Consideramos el caso de Ponzi tomando en cuenta la PEA de 1920 para el estado de Massachusetts (1'728318), por cuanto la ciudad de Boston pertenece a dicho estado:

A continuación se presenta las tablas con los resultados:

Tabla 7.

Parámetro	Antes PC	PC	Antes PS	PS
Período	5	6	9	10
Tiempo	(1año/s, 3mes/es)	(1año/s, 6mes/es)	(2año/s, 3mes/es)	(2año/s, 6mes/es)
NumClientes	10.779	16.971	56.112	81.454
Expansión de capital(miles)	12.850,33	13.451,86	14.955,68	15.668,36
Tamaño estafa(millones)	9,43	18,34	72,76	114,52
Retiros(miles)	600	876,26	9.716,86	18.033,32
Estado financiero(millones)	3,22	-5,36	-67,25	-124,26
Capital real(millones)	12,55	12,88	5,41	-9,84
Capital promedio	1377,51	944,94	176,5	-196,3

Resumen de datos Punto Crítico (PC), Punto de Saturación (PS) - Caso Ponzi - PEA Massachusetts.

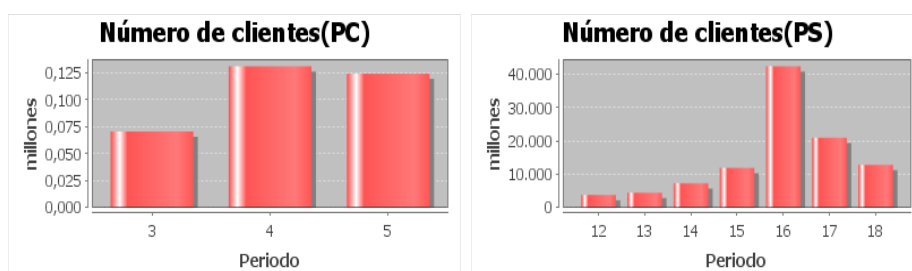


Figura 6: Número de clientes - Caso Ponzi - PEA Massachusetts. a) punto crítico b) punto de saturación

Analizando la Tabla 7 el número de clientes tiene una variación porcentual de 57 % al llegar al punto crítico.

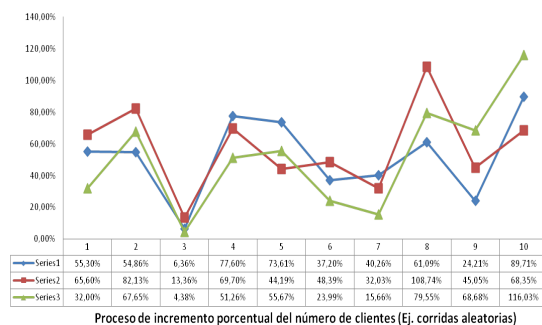


Figura 7: Variación porcentual del número de clientes - Caso Ponzi - PEA Massachusetts.

En la figura anterior apreciamos el incremento porcentual del número de clientes hasta que la pirámide financiera deja de funcionar. En algunos casos sobrepasa el 100 %, cuando se aproxima al punto de saturación.

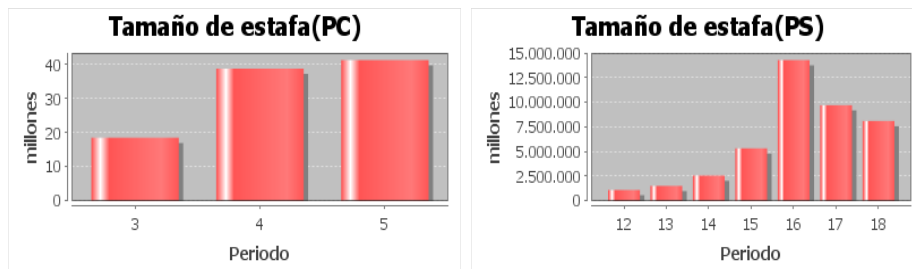


Figura 8: Tamaño de estafa - Caso Ponzi - PEA Massachusetts. a) punto crítico
b) punto de saturación

El tamaño de la estafa tiene un incremento porcentual de aproximadamente 524 % al llegar al punto de saturación. El 4,78 % del tamaño de estafa ha sido retirado por los inversores al llegar al punto crítico y en el punto de saturación el monto de retiro se aproxima al 15,75 %.

4.2. Caso Madoff (1960-2008)

Bernard Madoff Investments Securities (B L M I S) fundada en 1960 por Madoff, maquinó una de las estafas más grandes por el tiempo de duración, tamaño de estafa, número de clientes afectados alrededor del mundo. En su pirámide existieron grandes ahorradores privados, bancos, fondos de riesgo, entre otros, quienes recibían intereses anuales entre el 8 % al 12 % por la inversión, lo que generó estabilidad y confianza.

A partir de 1992, Madoff fue investigado por organismos reguladores y denunciado por varias empresas, pero lograba superar las inspecciones de la Comisión de Mercados y Valores (SEC). Las operaciones de inversión de Madoff eran un fraude que nadie quiso escuchar [10].

El tamaño de estafa estaría alrededor de 65.000 millones de dólares. El Grupo Santander colocó unos 2.320 millones de euros, de los cuales 2.010 millones correspondían a la banca privada internacional de América Latina[16].

Escenario de simulación:

Consideramos el caso de Madoff, con los siguientes parámetros:

Tabla 8.

Parámetro	Valor
E_0	5'000000
ω	10 %
i_p	8 %
h	12
m	100
c_0	1
η	4,6 %

Parámetros de simulación - Caso Madoff

Datos comparativos

En este caso fueron afectados miles de inversionistas (grandes ahorradores privados, bancos, fondos de riesgo, etc) de algunos continentes, desconociéndose la cifra aproximada de clientes afectados. Cuando la pirámide llega a los 25 años ha sobrepasado la población mundial, según Tabla 9.

Tabla 9.

Periodos comparativos		Número de clientes (miles)	
		Simulación	Datos investigados
13 años, 0 mes/es	APC	544,02	S/D
14 años, 0 mes/es	PC	1.756,33	
25 años, 0 mes/es	APS	86'880.042,97	
26 años, 0 mes/es	PS	235'914.711,84	
Mayor a 20 años		S/D	Incalculable

Número de clientes - datos comparativos - Caso Madoff.

En la Tabla 10, podemos observar que en el punto crítico el tamaño de la estafa es apenas el 0,30 % del monto de estafa investigado, al comparar con el tamaño de estafa a los 25 años el resultado de la simulación supera el mil por ciento.

Tabla 10.

Periodos comparativos		Tamaño de estafa (millones)	
		Simulación	Datos investigados
13 años, 0 mes/es	APC	60,72	S/D
14 años, 0 mes/es	PC	194,54	
25 años, 0 mes/es	APS	9'657.820,25	
26 años, 0 mes/es	PS	26'244.336,14	
Mayor a 20 años		S/D	Superior a \$65000

Tamaño de estafa - datos comparativos - Caso Madoff.

4.3. Caso Proyecciones DRFE (2005-2008)

El comerciante Carlos Alfredo Suarez, por medio de Proyecciones D.R.F.E. entregaba 70 % de interés mensual y en los tres últimos meses de duración de la pirámide subieron a 150 % mensual. Las ciudades de mayor captación fueron Pasto, Cali, Popayán, Santander de Quilichao, entre otras con aproximadamente 6 millones de afectados. El monto mínimo de inversión era 2 millones de pesos. Se presume que el monto de estafa fue de 2 billones de pesos [13]. Como dato adicional debemos mencionar que las tasas de interes para el año 2008 del Banco Central de Colombia era de 9,5 % [3].

Escenario de simulación:

Consideramos el caso particular de Proyecciones D.R.F.E., con los siguientes parámetros (hemos simplificado cifras para la simulación):

Tabla 11.

Parámetro	Valor
E_0	500.000
ω	10 %
i_p	70 %
h	1
m	2
c_0	1
η	9,5 %

Parámetros de simulación - Proyecciones D.R.F.E.

Datos comparativos

En la Tabla 12, se observa que el número de clientes en el punto crítico esta por debajo del 7 % del número de inversionistas investigados(mínimo 6 millones), mientras que para el punto de saturación el número de inversionistas simulados sobrepasa esta cifra en un 480 %.

Tabla 12.

Periodos comparativos		Número de clientes	
		Simulación (miles)	Datos investigados
3 años, 6 mes/es	APC	306,53	S/D
3 años, 7 mes/es	PC	430,14	
3 años, 10 mes/es	APS	15626,73	
3 años, 11 mes/es	PS	29225,68	
Mayor a 3 años		S/D	Superior a 6 millones

Número de clientes - datos comparativos - Proyecciones D.R.F.E.

En la Tabla 13, podemos observar que antes de llegar al punto crítico (3 años, 6 meses) se ha superado en un 300% al monto de estafa investigado.

Tabla 13.

Periodos comparativos		Tamaño de estafa	
		Simulación (millones)	Datos investigados
3 años, 6 mes/es	APC	7,4	S/D
3 años, 7 mes/es	PC	9,49	
3 años, 10 mes/es	APS	138,07	
3 años, 11 mes/es	PS	243,91	
Mayor a 3 años		S/D	Superior a 2 millones ³

Tamaño de estafa en millones - datos comparativos - Proyecciones D.R.F.E.

4.4. Caso Cabrera (1996-2005)

José Cabrera dirigía la notaría segunda del cantón Machala, entregaba intereses mensuales del 7% al 10% a miles de clientes de distintos lugares del Ecuador, especialmente de las provincias de Azuay, Guayas, Loja, Manabí y Pichincha en una de las estafas más grandes ocurridas en el país. Se presume que el monto de estafa superaría los \$700 millones con más de 35 mil personas afectadas. El monto de inversión inicial de algunos clientes sobrepasaba los \$30.000, según un listado encontrado en sus archivos personales. La lista de personas que conformaban la pirámide comprometía a varios jueces, políticos, banqueros, policías y militares [1].

Escenario de simulación:

Consideramos el caso particular de Cabrera, con los siguientes parámetros:

Tabla 14.

Parámetro	Valor
E_0	10'000.000
ω	10 %
i_p	7 %
h	1
m	500
c_0	1
η	2,5 %

Parámetros de simulación - Cabrera

Datos comparativos

Para el caso Cabrera podemos observar en la Tabla 15 que el número de clientes sobrepasa la cifra estimada en un 800% al llegar al punto crítico, para los siguientes meses se sobrepasa a la población mundial.

Tabla 15.

Periodos comparativos		Número de clientes	
		Simulación (miles)	Datos investigados
3 años, 8 mes/es	APC	186,557	S/D
3 años, 9 mes/es	PC	383,935	
10 años, 5 mes/es	APS	29'469.862,391	
10 años, 6 mes/es	PS	43'523.114,391	
Mayor a 9 años		S/D	Superior a 35 mil

Número de clientes - datos comparativos - Caso Cabrera.

En el resumen de la Tabla 16 podemos observar que en el punto crítico, el notario Cabrera debe haber tenido aproximadamente el 20% del tamaño de estafa estimado [1], según la simulación realizada.

Tabla 16.

Periodos comparativos		Tamaño de estafa (millones)	
		Simulación	Datos investigados
3 años, 8 mes/es	APC	103,15	S/D
3 años, 9 mes/es	PC	212,01	
10 años, 5 mes/es	APS	15'973.876,75	
10 años, 6 mes/es	PS	23'627.714,46	
Mayor a 9 años		S/D	Superior a \$700

Tamaño de estafa en millones - datos comparativos - Caso Cabrera.

4.5. Retiros vs tamaño de estafa

En la siguiente tabla se resume el porcentaje de retiro con respecto al tamaño de la estafa. Para el caso Ponzi el porcentaje de retiro crece, mientras que en los demás decrece a medida que la pirámide financiera incrementa el número de inversores.

Tabla 17.

Casos	Puntos de estudio			
	APC	PC	APS	PS
Cabrera	5,86 %	5,49 %	2,14 %	2,09 %
DRFE	23,40 %	22,25 %	9,67 %	8,93 %
Madoff	1,24 %	0,94 %	0,98 %	0,99 %
Ponzi PEA Masachusset	6,36 %	4,78 %	13,35 %	15,75 %
Ponzi PEA USA	3,30 %	3,47 %	4,64 %	4,86 %

Porcentaje de retiro con respecto al tamaño de la estafa - Casos de estudio.

5. Implicaciones en el Ecuador

A continuación analizamos algunos indicadores como la pobreza y la PEA en el periodo que permaneció activa la estafa de Cabrera.

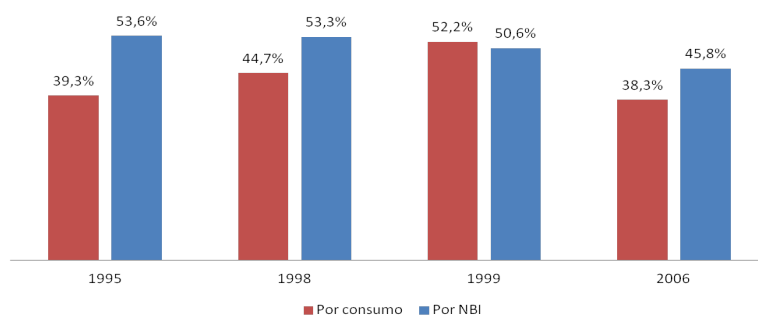


Figura 9: Evolución de la pobreza nacional en el Ecuador (1995-2006). Fuente: Elaboración propia a partir de Encuesta de Condiciones de Vida (I,II,III,IV,V)

Según los resultados de la V Encuesta de Condiciones de Vida (2005-2006)[8], las provincias con menos niveles de pobreza son: Pichincha, Azuay y El Oro.

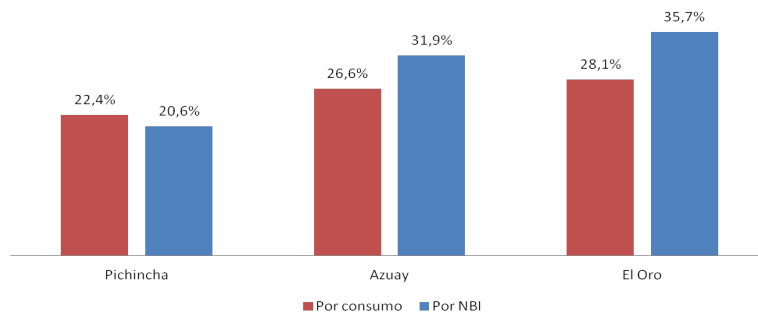


Figura 10: Provincias con menores niveles de pobreza (2005-2006). Fuente: INEC, Encuesta de Condiciones de Vida V Ronda [8]

Según el “Mapa de pobreza y desigualdad” [4], en base a la ECV 2005-2006, respecto a la provincia de El Oro, el 28,1 % de la población se ubica por debajo de la línea de pobreza por consumo y su coeficiente de Gini es de 0.39. El nivel de analfabetismo es de 5.6 % y en promedio la población tiene 8.3 años de estudio.

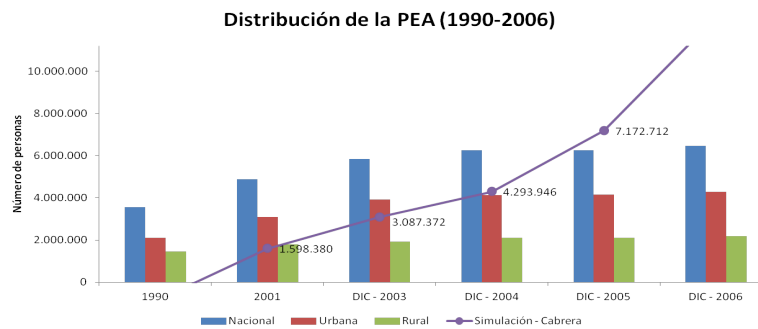


Figura 11: Distribución de la PEA (1995-2006). Fuente: Censos de Población y Vivienda 1990, 2001; Encuesta Nacional de Empleo y Subempleo 2003, 2004, 2005, 2006 [8]

Haciendo una comparación con los datos obtenidos a través de la simulación del caso Cabrera y los datos de la Población Económicamente Activa nacional, urbana y rural registrada desde el año 1990, tenemos que: Para el año 2001 el número de clientes, según la simulación del caso Cabrera no sobrepasa la PEA rural. En los posteriores años es superior con un 38 % para el año 2003, 51 % para el año 2004, 71 % para el año 2005. Lo mismo sucede con la PEA urbana, en el año 2004 el número de clientes es superior en un 4 % y para el 2005 es superior en un 42 %. Además se puede conocer que al llegar a diciembre 2005 el número de clientes sobrepasaría la PEA nacional en un 13 %.

Mediante la PEA provincial podemos conocer el número de afectados de

cada provincia, según el Censo de Población y Vivienda 2001.

Provincia	Población total	PEA	% PEA afectada
GUAYAS	3.309.034	1.220.389	31,5 %
PICHINCHA	2.388.817	995.452	38,6 %
MANABÍ	1.186.025	382.106	100,5 %
AZUAY	599.546	232.664	165,0 %
LOS RÍOS	650.178	225.875	170,0 %
TUNGURAHUA	441.034	197.033	194,9 %
EL ORO	525.763	195.046	196,8 %
CHIMBORAZO	403.632	164.009	234,1 %
COTOPAXI	349.540	141.062	272,2 %
LOJA	404.835	137.885	278,4 %
IMBABURA	344.044	132.200	290,4 %
ESMERALDAS	385.223	129.655	296,1 %
CAÑAR	206.981	72.319	530,9 %
BOLIVAR	169.370	63.151	607,9 %
CARCHI	152.939	58.471	656,6 %
SUCUMBIOS	128.995	49.509	775,5 %
MORONA SANTIAGO	115.412	40.911	938,4 %
ORELLANA	86.493	33.706	1139,0 %
NAPO	79.139	30.375	1264,0 %
ZAMORA CHINCHIPE	76.601	26.076	1472,3 %
PASTAZA	61.779	24.332	1577,9 %
GALAPAGOS	18.640	8.772	4376,7 %

Población Total y PEA. Fuente: INEC, Censo de Población y Vivienda 2001.

En la Figura 12, podemos apreciar que cuando llega al punto crítico el número de clientes (383.925) ya supera en un 0.5 % la PEA de Manabí, en un 49 % la PEA de El Oro y en un 94 % la PEA de Pastaza.

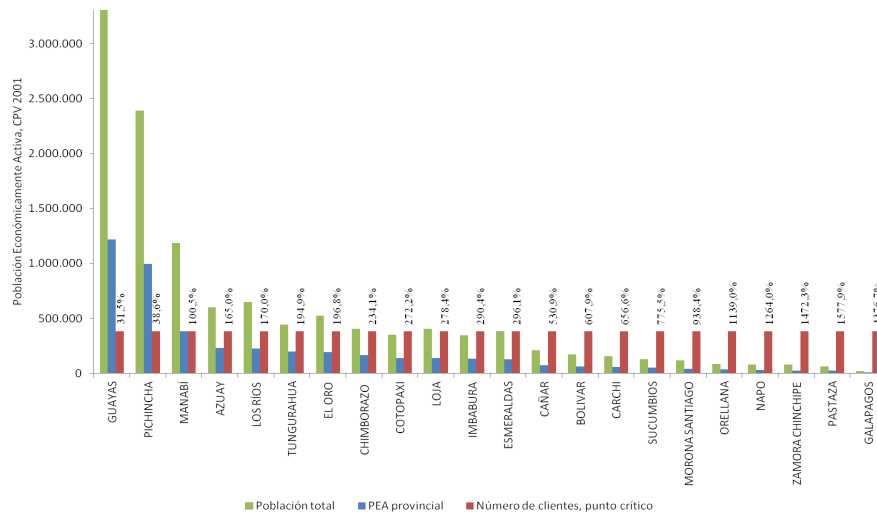


Figura 12: Población Total y PEA afectados en el caso Cabrera. Fuente: Elaboración propia

Cuando llega al punto crítico el número de clientes ya supera en un 0.5 % la PEA de Manabí, en un 49 % la PEA de El Oro y en un 94 % la PEA de Pastaza.

Además, los factores económicos como el proceso de la dolarización, la influencia en el consumo y crédito, hicieron que la estafa siguiera, sin que los organismos de control puedan detectarla hasta el año 2005.

6. Conclusiones

Con la implementación del algoritmo matemático y uso de la simulación se ha relacionado datos investigados con los posibles escenarios de comportamiento de algunas pirámides financieras.

La empresa captadora de dinero no depende necesariamente de un capital inicial fuerte, puesto que el pago de intereses de la inversión de los clientes es pagada por los nuevos clientes que ingresan a la pirámide. Por tanto, la empresa puede disponer del monto inicial de inversión más la tasa de retorno ofrecida a los primeros clientes.

Mientras la tasa de retorno se incrementa, el tiempo que dura la pirámide es menor, de igual forma depende del lapso en que los valores son cancelados a los clientes.

El monto de retiro es mínimo con respecto al tamaño de la estafa.

Referencias

- [1] A. ANGULO, D. ARAUJO, U. , E. CARVAJAL, M. CEDEÑO, G. COLA, P. CORONEL, B. MOYANO, AND J. TIBANLOMBO, *La ruleta rusa*, EDIMPRES S.A., Quito, Ecuador, 2005.
- [2] M. ARTZROUNI, *The mathematics of Ponzi schemes*, Mathematical Social Sciences, (2009), pp. 190–201.
- [3] BANCO DE LA REPÚBLICA, *Indicador bancario de referencia*. Disponible en: <http://www.banrep.gov.co/series-estadisticas/Contingencia/IBR/Plazoovernight.xls>. Consultado en Agosto 20, 2012.
- [4] C. CALERO, R. MALDONADO, A. MOLINA, M. ROBLES, AND P. LENGUAS, *Mapa de pobreza y desigualdad en Ecuador*, Ministerio de Coordinación de Desarrollo Social SIISE - STMCDs, Ecuador, 2008.
- [5] DEWITT, LARRY, *Ponzischemes vs. social security*. Disponible en: <http://www.ssa.gov/history/ponzi.htm>. Consultado en Noviembre 4, 2012.
- [6] EL BANCO MUNDIAL, *Población activa, total*. Disponible en: <http://datos.bancomundial.org/indicador>. Consultado en Septiembre 9, 2012.
- [7] M. FRIEDMAN AND A. J. SCHWARTZ, *A Monetary History of the United States, 1867-1960*, no. frie63-1 in NBER Books, National Bureau of Economic Research, Inc, Jan-Jun 1963.
- [8] INEC, *Pobreza y desigualdad*, Resultados de la Encuesta de Condiciones de Vida - Quinta Ronda, (2006).
- [9] T. KITCHENS, *Cash flow analysis method: following the paper trail in ponzi schemes*, FBI Law Enforcement Bulletin, 62 (1993), pp. 10–13.
- [10] H. MARKOPOLOS, *No one would listen A true financial thriller*, John Wiley Sons Limited , Inc., Chichester, Reino Unido, 2010.
- [11] J. MAYORGA-ZAMBRANO, *Un Modelo Matemático para Esquemas Piramidales Tipo Ponzi*, Analítika, 1 (2011), pp. 119–129.
- [12] J. MONZÓ, *¿Por qué colapsan las pirámides financieras? Caso Madoff*, Pensamiento Sistémico, <http://jmonzo.blogspot.com>, (2008).
- [13] M. PAREDES, *Las pirámides financieras: Colombia*, Estudios y Análisis Técnicos - Estudios Macrofinancieros, Superintendencia de Bancos y Seguros del Ecuador, (2009).
- [14] UNITED STATES ATTORNEY SOUTHERN DISTRICT OF NEW YORK, *Bernard l. madoff pleads guilty to eleven-count criminal information and is remanded into custody*, Release of the Department of Justice, (March 12, 2009).

- [15] UNITED STATES CENSUS BUREAU, *Fourteenth census of the united states*. Disponible en: <http://www2.census.gov/prod2/decennial/documents/41084484v1ch1.pdf>. Consultado en Noviembre 24, 2012.
- [16] A. WEITMANN, *El caso Madoff: Los secretos de la estafa del siglo*, LA ESFERA DE LOS LIBROS, Madrid, España, 2009.

ANEXOS

A. Algoritmo general

Algorithm 1: $(T_c, T_s) = \text{Ponzi}(h; c_0, \mathcal{U}, a, b, nSim; m, E_0; i_p, \bar{\eta}, \sigma_1, \sigma_2; d_0, d_1, \omega_*)$

```

Input:  $h; c_0, U, a, b, nSim; m, E_0; i_p, \bar{\eta}, \sigma_1, \sigma_2; d_0, d_1, \omega_*$ 
Output:  $(T_c, T_s)$ 
// Initialize
1  $t_0 \leftarrow 0; p_0 \leftarrow c_0; C_0 \leftarrow c_0;$ 
2  $\omega^* \leftarrow \frac{i_p}{1 + i_p}; \alpha \leftarrow \frac{d_1 u - d_0 \omega^*}{d_1 d_0^2 - d_0 d_1^2}; \beta \leftarrow \frac{d_0^2 \omega^* - d_1 u}{d_1 d_0^2 - d_0 d_1^2};$ 
3  $L_0 \leftarrow E_0 + m; \gamma \leftarrow \frac{E_0}{m}; \lambda_0 \leftarrow \frac{L_0}{m}; F_0 \leftarrow E_0 - i_p \cdot m \cdot c_0; \mathcal{L}_0 \leftarrow \frac{L_0}{C_0};$  // Process
4 for  $sMont = 0, 1, \dots, nSim$  do
5    $S_0 \leftarrow 1 - \frac{1}{U}; I_0 \leftarrow \frac{1}{U}; S(t_0) \leftarrow S_0; I(t_0) \leftarrow I_0;$ 
6    $k \leftarrow 1; Z \leftarrow L_0; paux \leftarrow (\text{Math.abs}(a) + \text{Math.abs}(b))/\text{periodo}; haux \leftarrow a;$ 
7   while  $Z > 0$  do
8      $t_k \leftarrow k \cdot h;$ 
9      $haux \leftarrow haux + paux;$ 
10     $S(t_k) \leftarrow -a \cdot haux \cdot S(t_{k-1}) \cdot I(t_{k-1}) + S(t_{k-1});$ 
11     $I(t_k) \leftarrow haux \cdot (a \cdot S(t_{k-1}) \cdot I(t_{k-1}) - b \cdot I(t_{k-1})) + I(t_{k-1});$ 
12     $\bar{N}_k \leftarrow \frac{I(t_k)}{I(t_{k-1})} - 1; N_k \leftarrow \text{Normal}(\bar{N}_k, 1/4);$ 
13     $c_k \leftarrow N_k \cdot C_{k-1}; C_k \leftarrow C_{k-1} + c_k;$ 
14    for  $j = 0, 1, \dots, k$  do
15      if  $k - j \leq d_1$  then  $\bar{\omega}_{k,j} = (k - j) \cdot [\alpha \cdot (k - j) + \beta];$ 
16      else  $\bar{\omega}_{k,j} = \omega^*;$ 
17       $\omega_{k,j} \leftarrow \text{Normal}(\bar{\omega}_{k,j}, \sigma_1^2);$ 
18      if  $j < k$  then  $p_{k,j} \leftarrow p_{k-1,j} \cdot (1 - \omega_{k,j})(1 + i_p);$ 
19      else  $p_{k,j} \leftarrow c_k;$ 
20    end
21    for  $l = 0, 1, \dots, k - 1$  do
22       $\eta_l \leftarrow \text{Normal}(\bar{\eta}, \sigma_2^2)$ 
23    end
24     $P_k \leftarrow m \cdot \sum_{j=0}^k p_{k,j}; E_k \leftarrow E_0 \cdot \prod_{l=0}^{k-1} (1 + \eta_l);$ 
25     $\hat{P}_k \leftarrow P_k + E_k;$ 
26     $w_k \leftarrow (1 + i_p) \cdot \sum_{j=0}^{k-1} \omega_{k,j} p_{k-1,j}; W_k \leftarrow m \cdot w_k;$ 
27     $\lambda_k \leftarrow (1 + \eta_{k-1}) \cdot \lambda_{k-1} + c_k - w_k; L_k \leftarrow m \cdot \lambda_k;$ 
28     $F_k \leftarrow F_{k-1} - P_k \cdot i_p + \eta_{k-1} \cdot L_{k-1};$ 
29    for  $j = 0, 1, \dots, k - 1$  do
30       $U_j \leftarrow m \cdot \left[ c_j - \sum_{l=j+1}^k \omega_{l,j} \cdot p_{l,j} \right];$ 
31    end
32     $U_k \leftarrow m \cdot c_k; R_k \leftarrow \sum_{j=0}^k U_j;$ 
33     $\mathcal{L} \leftarrow \frac{L_k}{C_k}; \mathcal{E}_k \leftarrow \frac{\lambda_k - \gamma}{w_k};$ 
34     $Z \leftarrow L_k; k \leftarrow k + 1;$ 
35  end
36 end

```